Matematika G1

Előadások vázlatos anyaga

2024 tavasz

Február 13.

Mese a valós számokról (nem kérjük számon).
Numerikus sorozatok definíciója.
Határérték definíciója. $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$ bizonyítása definícióval.

Február 15.

$\lim_{n\to\infty} \frac{n}{n^2+1} = 0$ bizonyítása definícióval.
Végtelen határérték fogalma.
Állítás: minden sorozatnak legfeljebb egy határértéke lehet.
Konvergencia és **divergencia** fogalma.
Korlátos sorozat fogalma.
Állítás: ha egy sorozat konvergens, akkor korlátos. Ennek megfordítása nem igaz (van korlátos, de nem konvergens sorozat).
Határérték tulajdonságai: összeg, szorzat, abszolútérték, reciprok, skalárszoros.
Monoton növekedő és monoton csökkenő sorozat fogalma. Monoton sorozat fogalma.
Állítás: Ha egy sorozat monoton és korlátos, akkor konvergens (bizonyítottuk is). Ennek megfordítása nem igaz (van konvergens, de nem monoton sorozat).

Február 20.

Rendőr-elv.

$\lim_{n\to\infty} n^k$ értéke ha $k < 0$, $k = 0$ és $k > 0$.

$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$ és $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{c} = 1$ $(c > 0)$, a másodikat be is bizonyítottuk. Alkalmazás: rendőr elves példa.

$\lim_{n\to\infty} q^n$ értéke ha $|q| < 1$, $q > 1$, $q < -1$ illetve ha $q = 1$ vagy $q = -1$. Ezt be is bizonyítottuk.

Állítás: Egy korlátos és egy másik, nullába tartó sorozat szorzata is nullába tart.

$\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n = e$. Ez akkor is igaz, ha $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{b_n}\right)^{b_n} = e$ és $b_n \to \infty$.

Február 22.

Részsorozat fogalma.
Állítás: Konvergens sorozat minden részsorozata konvergens.
Bolzano-Weierstrass tétel: Korlátos sorozatnak létezik konvergens részsorozata.

Módosított sorozatok:

- Ha a_n konvergens és b_n divergens, akkor az $a_1,\ b_1,\ a_2,\ b_2,\ a_3,\ b_3,\ldots$ sorozat divergens.
- Ha $a_n \to A$ és $b_n \to B$, akkor az $a_1,\ b_1,\ a_2,\ b_2,\ a_3,\ b_3,\ldots$ sorozat csak akkor konvergens, ha $A = B$, egyébként divergens.
- Ha $a_n \to A$, akkor az $a_1 + a_2,\ a_2 + a_3,\ a_3 + a_4,\ldots$ sorozat $2A$-hoz tart.
- Ha $a_n \to A$, akkor az $a_1 - a_2,\ a_2 - a_3,\ a_3 - a_4,\ldots$ sorozat 0-hoz tart.
- Ha $a_n \to A$, akkor az $a_1 \cdot a_2,\ a_2 \cdot a_3,\ a_3 \cdot a_4,\ldots$ sorozat A^2-hez tart.
- Ha $a_n \to A$ és $A \neq 0$, akkor az $\dfrac{a_2}{a_1},\ \dfrac{a_3}{a_2},\ \dfrac{a_4}{a_3},\ldots$ sorozat 1-hez tart.
- Ha egy sorozatban véges sok elemet
  - megváltoztatok, vagy
  - törlök, vagy
  - hozzáírok,

  akkor a sorozat konvergenciája nem változik.

Infimum és **szuprémum** fogalma. **Torlódási pont** fogalma. **Limsup** (legnagyobb torlódási pont) és **liminf** (legkisebb torlódási pont) fogalma.
Collatz sejtés.
Polinomok definíciója. **Gyök** definíciója.
Tétel: Ha egy n-ed fokú polinom valós gyökei $x_1, x_2, \ldots, x_n$, akkor a polinom felírható az alábbi alakban:

$$f(x) = a_n(x - x_1)(x - x_2)\ldots(x - x_n).$$

Tétel: Ha a polinom minden együtthatója egész szám, akkor a polinom minden egész gyöke osztója a_0-nak.
Példák polinomok szorzattá alakítására.

Február 27.

Példa polinomosztásra.
Exponenciális függvény és grafikonja: e^x, e^{-x}, $-e^x$, $-e^{-x}$.
Logaritmus függvény (természetes azaz e alapú) és grafikonja. Kapcsolata az exponenciális függvénnyel.
Trigonometrikus függvények és grafikonjaik: $\sin(x)$, $\cos(x)$, $\mathrm{tg}(x)$. Azonosságok: $\sin^2(x)+\cos^2(x)=1$, $\sin(2x)=2\sin(x)\cos(x)$, $\cos(2x)=\cos^2(x)-\sin^2(x)$.
Trigonometrikus inverzei és grafikonjaik: $\arcsin(x)$, $\arccos(x)$, $\mathrm{arctg}(x)$.
Hiperbolikus függvények és grafikonjaik: $\mathrm{sh}(x)$, $\mathrm{ch}(x)$, $\mathrm{th}(x)$.
Inverzeik: $\mathrm{arsh}(x)$, $\mathrm{arch}(x)$, $\mathrm{arth}(x)$.

Február 29.

$\lim\limits_{x\to a} f(x)=A$ és $\lim\limits_{x\to a} f(x)=\infty$ definíciója.

$\lim\limits_{x\to \infty} f(x)=A$ és $\lim\limits_{x\to \infty} f(x)=\infty$ definíciója.

Állítás: Ha $\lim\limits_{x\to a} f(x)=A$ és $\lim\limits_{x\to a} f(x)=B$, akkor $A=B$.

Határérték tulajdonságai: összeg, szorzat, konstansszoros, abszolútérték, hányados.

Bal- és jobboldali határérték.

Állítás: Ha a belső pontja $\mathrm{Dom}(f)$-nek, és $\lim\limits_{x\to a+0} f(x)=\lim\limits_{x\to a-0} f(x)=A$, akkor létezik $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ és $\lim\limits_{x\to a} f(x)=A$.

Március 5.

Állítás: $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\sin(x)}{x}=1$.

Állítás: Ha $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=0$ és $g(x)$ korlátos, akkor $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)g(x)=0$. Alkalmazás: $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\sin(x)}{x}=0$.

Példa: $\lim\limits_{x\to 1} \mathrm{arctg}\left(\dfrac{x}{x-1}\right)$ nem létezik.

Példa: $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x}{\mathrm{arcsin(x)}}$ megoldása az $y=\mathrm{arcsin(x)}$ új változó beveztésével.

Példa: $\lim\limits_{x\to 1} \mathrm{arctg}\left(\dfrac{x}{x-1}\right)$ nem létezik.

Állítás: $\lim\limits_{x\to\infty} \left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x=e$.

Folytonosság egy adott a pontban. **Folytonos függvény** definíciója.

Állítás: Ha f, g folytonos függvények, akkor $f+g$, $f \cdot g$, $c \cdot f$ ($c \in \mathbb{R}$ konstans), $|f|$ és $f(g(x))$ is folytonosak.

Állítás: Az $f(x) \equiv c$ ($c \in \mathbb{R}$ konstans), $f(x) = x$, polinomok, e^x, $\log(x)$, $\sin(x)$, $\cos(x)$, $\mathrm{sh}(x)$, $\mathrm{ch}(x)$ függvények folytonosak.

Weierstrass tétele: Ha $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ ($a, b \in \mathbb{R}$ véges konstansok) és f folytonos, akkor léteznek olyan $c, d \in [a,b]$ értékek, amelyekre $f(a) = \max_{x\in[a,b]} f(x)$, $f(a) = \min_{x\in[a,b]} f(x)$.

Bolzano tétele: Ha $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ ($a, b \in \mathbb{R}$ véges konstansok) és f folytonos, továbbá $f(a) \cdot f(b) < 0$ (azaz ezek különböző előjelűek), akkor létezik egy olyan $c \in [a,b]$, amire $f(c) = 0$.

Szakadások típusai: elsőfajú (megszüntethető, ugrás) és másodfajú.

Március 7.

Páros függvény definíciója, geometriai jelentése. Példák.

Páratlan függvény definíciója, geometriai jelentése. Példák.

Monoton növekedő és **szigorúan monoton növekedő** függvény definíciója. Példák.

Monoton csökkenő és **szigorúan monoton csökkenő** függvény definíciója. Példák.

(Alulról) **konvex** függvény definíciója, geometriai jelentése. Példák.

(Alulról) **konkáv** függvény definíciója, geometriai jelentése. Példák.

Periodikus függvény definíciója. Példák.

Március 12.

Adott pontban deriválható függvény fogalma. **Deriváltfüggvény** fogalma. **Deriválható függvény** fogalma. **Folytonosan deriválható függvény** fogalma.

Állítás: Ha egy függvény deriválható, akkor folytonos. A megfordítása nem igaz: van olyan függvény, ami folytonos de nem deriválható (pl. $|x|$ az $a = 0$-ban).

Deriválási szabályok: összeg, skalárral való szorzás. szorzat, hányados. Láncszabály.

Március 14.

Nevezetes deriváltak: konstans függvény, x^n (ezt bizonyítottuk arra az esetre, amikor n pozitív egész), e^x, a^x $(a > 0)$, $\sin(x)$, $\cos(x)$, $\mathrm{sh}(x)$ (ezt bizonyítottuk is), $\mathrm{ch}(x)$, $\ln(x)$ $(x > 0)$, $\log_a(x)$ $(x > 0,\ a > 0,\ a \neq 1)$, $\arcsin(x)$, $\arccos(x)$, $\mathrm{arctg}(x)$, $\mathrm{arsh}(x)$, $\mathrm{arch}(x)$, $\mathrm{arth}(x)$.

Példák deriválásra.

Eddig tart az első ZH anyaga!

Március 19.

Implicit függvény deriváltja. Példa: $3x^2 + 4y^2 + 3xy = 24$ érintője hol lesz függőleges, illetve vízszintes.

Érintő egyenlete. Példa: $f(x) = 3\pi - 2\mathrm{arcsin}(3 - 2x)$ érintőjének egyenlete az $x_0 = \dfrac{7}{4}$ pontban.

Március 21.

Konzultáció, gyakorlás az első zárthelyire.

Március 26.

Első zárthelyi.

Április 9.

(Bernoulli-) l'Hospital szabály: Legyen $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f'(a)$ és $g'(a)$ léteznek, $g'(a) \neq 0$ és a $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$ határérték létezik (véges). Ekkor ha $f(a) = g(a) = 0$, akkor

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Példák a szabály alkalmazására.

Rolle tétele: Legyen $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ folytonos és deriválható (a, b)-n. Ekkor ha $f(a) = f(b)$, akkor van egy olyan $c \in (a, b)$, amire $f'(c) = 0$. A geomteriai jelentést megbeszéltük.

Lagrange tétele: Legyen $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ folytonos és deriválható (a, b)-n. Ekkor létezik egy olyan $c \in (a, b)$, amire

$$f(b) - f(a) = (b - a)f'(c).$$

Geometriai jelentést is megbeszéltük, továbbá ezt a tételt be is bizonyítottuk (Rolle tétel segítségével).

Állítás: Legyen $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ deriválható. Ekkor az alábbiak igazak:

(a) Ha $f' = 0$ mindenhol, akkor f konstans függvény.

(b) Ha $f' \geq 0$ mindenhol, akkor f monoton növekedő függvény.

(c) Ha $f' > 0$ mindenhol, akkor f szigorúan monoton növekedő függvény.

(d) Ha $f' \leq 0$ mindenhol, akkor f monoton csökkenő függvény.

(e) Ha $f' < 0$ mindenhol, akkor f szigorúan monoton csökkenő függvény.

Az állítás (a), (b) és (c) pontjait bebizonyítottuk (Lagrange tétellel), a maradék kettőt a következő előadáson fogjuk.

Április 11.

Az előző előadás utolsó állításának (d) és (e) pontjait bizonyítottuk (Lagrange tétellel).

Állítás: Legyen $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ kétszer deriválható.

(a) f konvex (a, b)-n $\iff$ f' monoton növekszik (a, b)-n $\iff$ $f'' \geq 0$ (a, b)-n.

(b) f konkáv (a, b)-n $\iff$ f' monoton csökken (a, b)-n $\iff$ $f'' \leq 0$ (a, b)-n.

Lokális maximum, **lokális minimum**, **lokális szélsőérték** definíciói.

Állítás: Legyen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ kétszer deriválható.

(a) **elsőrendű (szükséges) feltétel:** Ha f-nek lokális szélsőértéke van a-ban, akkor $f'(a) = 0$.

(a) **másodrendű (elégséges) feltétel:** Ha $f'(a) = 0$ és $f''(a) \neq 0$ (vagy másként: f' előjelet vált a-ban), akkor f-nek lokális szélsőértéke van a-ban.

Ha $f''(a) > 0$ (vagy másként: f' pozitívból negatívvá változik), akkor f-nek lokális maximuma van.

Ha $f''(a) < 0$ (vagy másként: f' negatívból pozitívvá változik), akkor f-nek lokális minimuma van.

Megjegyzés: Ha $f''(a) = 0$, akkor nem tudjuk, hogyan viselkedik ott a függvény. Például $f(x) = x^3$-ra az $a = 0$ pontban ez igaz, és ott nincsen szélsőértéke, de az $f(x) = x^4$ függvényre $a = 0$-ban szintén igaz, és annak ott pedig minimuma van.

Inflexiós pont definíciója.

Állítás: Legyen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ kétszer deriválható. Ha f'' előjelet vált a-ban, akkor ott f-nek infelxiós pontja van.

Megjegyzés: Ha $f'(a) = 0$ és $f''(a) = 0$, abból még nem következik, hogy ott infelxiós pontja van a függvénynek, lásd az $f(x) = x^4$ függvényt $a = 0$-ban (ennek itt nincs).

Taylor sorfejtés: Legyen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $[a, b] \subset \mathrm{Dom}(f)$, továbbá f n-szer deriválható $[a, b]$-n és $n + 1$-szer deriválható (a, b)-n. Ekkor létezik egy olyan $c \in (a, b)$, hogy

$$f(b) = f(a)+f'(a)(b-a)+\frac{f''(a)}{2!}(b-a)^2+\frac{f'''(a)}{3!}(b-a)^3+\dots\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(b-a)^n+\frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(b-a)^{n+1} =$$

vagy rövidebben:

$$= \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(b-a)^k + \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(b-a)^{n+1}$$

Ekkor a $T^f_{n,a}(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k$ kifejezést az f függvény a körüli, n-edfokú Taylor polinomjának nevezzük.

Megbeszéltük a tétel alkalmazását, illetve felírtuk $f(x) = e^x$ nulla körüli Taylor sorát, és ezt használva becsültük e^2 és e^1 értékeit az $n = 3$ tagú Taylor polinom segítségével.

Április 16.

Paraméteresen adott görbék fogalma. A kétfajta felírás kapcsolata.

Állítás: Ha $x(t)$ szigorúan monoton, akkor az

$$\begin{cases} x &= x(t), \\ y &= y(t), \end{cases}$$

formula átírható $y = f(x)$ alakba.

Az (u_0, v_0) középpontú és r sugarú **kör egyenlete**

$$\begin{cases} x &= u_0 + r\cos(t), \\ y &= v_0 + r\sin(t), \end{cases}$$

ahol $t \in [0, 2\pi)$. Ezt le is vezettük.

Hiperbolaág egyenlete

$$\begin{cases} x &= a\,\mathrm{ch}(t), \\ y &= b\,\mathrm{sh}(t), \end{cases}$$

ahol a, b a parabola alakját befolyásoló konstansok, t pedig azon síkidom területe, melynek oldalai a vizsgált pontot az origóval összekötő szakasz, a vizsgált pont x

tengelyre vett tükörképét az origóval összekötő szakasz, illetve a vizsgált pontot az x tengelyre vett tükörképével összekötő hiperbolaív (ezt úgy értve, hogy ha a pont az $y < 0$ félsíkban van, akkor t a terület -1-szerese).

Közönséges ciklois (más néven brachisztochron) egyenlete, ami egyenesen csúszásmentesen gördülő a sugarú kör egy adott pontja által leírt pályának egyenlete:

$$\begin{cases} x &= at - a\sin(t), \\ y &= a - a\cos(t). \end{cases}$$

Ezt le is vezettük.

Lemniszkáta egyenlete: A lemniszkáta azon pontok halmaza a síkon, amelyek kettő adott ponttól vett távolságainak szorzata állandó és egyenlő a két pont féltávolságának (ez legyen a) négyzetével.

$$\begin{cases} x &= a\sqrt{2}\sqrt{\cos(2t)}\cos(t), \\ y &= a\sqrt{2}\sqrt{\cos(2t)}\sin(t). \end{cases}$$

Április 18.

Első pótzárthelyi, nincs előadás.

Április 23.

Tétel: Tekintsük az alábbi paraméteresen adott görbét:

$$\begin{cases} x &= x(t), \\ y &= y(t), \end{cases}$$

ahol $t \in (t_1, t_2)$. Legyen $x(t)$ szigorúan monoton növekvő, x, y a $t_0 \in (t_1, t_2)$ pontban deriválhatók és $x'(t_0) \neq 0$. Ekkor az $y(x)$ függvény deriválható és (használva az $x_0 = x(t_0)$ jelölést)

$$\frac{dy(x_0)}{dx} = \frac{y'(t_0)}{x'(t_0)}.$$

Ezt példán szemlélettük. Levezettük a második derivált formuláját is:

$$y''(x_0) = \frac{y''(t_0)x'(t_0) - y'(t_0)x''(t_0)}{(x'(t_0))^3}.$$

Primitív függvény, **határozatlan integrál** fogalma.

Állítás: Legyen $f, F, G : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ olyanok, hogy $F' = f$ és $G' = f$. Ekkor létezik egy olyan konstans, hogy $F(x) = G(x) + c$. Ezt be is bizonyítottuk.

Állítás: Legyen $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ és tegyük fel, hogy az alábbi integrálok léteznek. Ekkor

$$\int f(x) + g(x)dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx,$$
$$\int cf(x)dx = c\int f(x)dx.$$

Nevezetes függvények integárljai: e^x, $\sin(x)$, $\cos(x)$, x^n $(n \neq -1)$, $\frac{1}{x}$, $\mathrm{sh}(x)$, $\mathrm{ch}(x)$.

Nevezetes integrálási szabályok:

$$\int (f(x))^n f'(x)dx = \frac{(f(x))^{n+1}}{n+1} + c, \qquad \text{ahol } n \neq -1,$$
$$\int \frac{f'(x)}{f(x)}dx = \ln(|f(x)|) + c, \qquad \text{ahol } f(x) \neq 0,$$
$$\int f'(g(x))g'(x)dx = f(g(x)) + c.$$

Példák ezek alkalmazására.

Állítás (Parciális integrálás): Legyen $u, v : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ deriválható függvények és tegyük fel, hogy $u'v$ és uv' integráljai léteznek. Ekkor

$$\int u'(x)v(x)dx = u(x)v(x) - \int u(x)v'(x)dx.$$

Ezt be is bizonyítottuk.

Április 25.

Példa parciális integrálásra: $\int \ln(x)dx$. Az u' és v függvények választásának három esete. Nehezebb példa ("I-s módszer"): $\int e^x \sin(x)dx$.

Parciális törtekre bontás: a módszer lépései, két példa: $\int \frac{x^3 - 5x^2 + 7x}{x^2 - 5x + 6}dx$, $\int \frac{1}{x^3 + 2x}dx$.

Április 30.

Parciális törtekre bontás: két további példa: $\int \frac{x}{x^2 + 2x + 1}dx$, $\int \frac{2}{9x^2 + 3}dx$.

Helyettesítéses integrál, példa: $\int \frac{\cos(x)}{\sqrt{\sin(x) + 1}}dx$, itt a helyettesítés $t = \sin(x) + 1$.

Határozott integrálás: bevezetés. **Felosztás** fogalma, **felső** és **alsó Riemann-összeg** fogalma.