Matematika G1 Első mintaZH

A dolgozaton 5+5+5+5+5=25 pont szerezhető. Munkaidő: 70 perc.

1. Számítsa ki az alábbi sorozat határértékét! Adjon tetszőleges $\varepsilon > 0$-hoz $N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ küszöbindexet!

$$a_n = \frac{n^2 + 2n - 3}{n^3 + 3n^2 + 2}$$

Megoldás: A határérték kiszámításához kiemelhetünk a számlálóból és a nevezőből is n^3-t:

$$\frac{n^2 + 2n - 3}{n^3 + 3n^2 + 2} = \frac{n^3\left(\frac{1}{n} + \frac{2}{n^2} - \frac{3}{n^3}\right)}{n^3\left(1 + \frac{3}{n} + \frac{2}{n}\right)} = \frac{\frac{1}{n} + \frac{2}{n^2} - \frac{3}{n^3}}{1 + \frac{3}{n} + \frac{2}{n}} \to \frac{0 + 0 - 0}{1 + 0 + 0} = 0.$$

(1 pont) Itt a nagyságrendekkel is indokolhatunk.

Mivel $A = 0$, a vizsgálandó különbség:

$$\left|\frac{n^2 + 2n - 3}{n^3 + 3n^2 + 2} - 0\right| = \left|\frac{n^2 + 2n - 3}{n^3 + 3n^2 + 2}\right| =$$

(1 pont) Felhasználjuk, hogy $n^3 + 3n^2 + 2 \geq 0$ és $n^2 + 2n - 3 \geq 0$ ha $n \geq 1$:

$$= \frac{n^2 + 2n - 3}{n^3 + 3n^2 + 2} \leq \frac{n^2 + 2n - 3}{n^3} \leq \frac{n^2 + 2n^2}{n^3} = \frac{3}{n} < \varepsilon$$

(2 pont) Ebből $\dfrac{3}{\varepsilon} < n$, azaz $N(\varepsilon) = \min\left\{\left[\dfrac{3}{\varepsilon}\right] + 1{,}1\right\}$. (1 pont)

2. Számítsa ki a következő sorozat határértékét! Válaszának minden lépését indokolja!

$$a_n = \frac{2^{2n} + 5^n}{3^{2n}}\cos(n^2 + 1) + \left(1 + \frac{1}{4n}\right)^{2n}$$

Megoldás: Vizsgáljuk a két tagot külön-külön!

Az első tagban

$$\frac{2^{2n} + 5^n}{3^{2n}} = \frac{4^n + 5^n}{9^n} = \frac{9^n\left(\left(\frac{4}{9}\right)^n + \left(\frac{5}{9}\right)^n\right)}{9^n} = \left(\frac{4}{9}\right)^n + \left(\frac{5}{9}\right)^n \to 0 + 0 = 0.$$

(2 pont) Mivel $\cos(n^2 + 1)$ korlátos és nullába tartóval van szorozva, ezért

$$\frac{2^{2n} + 5^n}{3^{2n}}\cos(n^2 + 1) \to 0.$$

(1 pont)

A második tag:

$$\left(1 + \frac{1}{4n}\right)^{2n} = \left(\left(1 + \frac{1}{4n}\right)^n\right)^2 = \left(\left(1 + \frac{1}{4n}\right)^{4n\cdot\frac{1}{4}}\right)^2 = \left(\left(1 + \frac{1}{4n}\right)^{4n}\right)^{1/2} \to e^{1/2}.$$

(2 pont)

Összességében tehát $a_n \to 0 + e^{1/2} = e^{1/2}$.

3. Folytonossá tehető-e az alábbi függvény az $x = 1$ pontban? Ha igen, határozza meg a értékét úgy, hogy a függvény folytonos legyen az adott pontban!

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{2x^2 - 8x + 6}{x^2 - 2x + 1} & \text{ha } x \neq 1, \\ a & \text{ha } x = 1. \end{cases}$$

Megoldás: A függvény akkor tehető folytonossá az adott pontban, ha jobb- és baloldali határértékei léteznek és ezek egyenlők. (1 pont)

$$\lim_{x\to 1+0} \frac{2x^2 - 8x + 6}{x^2 - 2x + 1} = \lim_{x\to 1+0} \frac{2(x-1)(x-3)}{(x-1)^2} = \lim_{x\to 1+0} \frac{2x-6}{x-1} = \lim_{x\to 1+0} \frac{-4}{x-1}$$

Ha $x > 1$, akkor $x - 1 > 0$ azaz ekkor a nevező pozitív lesz, emiatt a tört $-\infty$-hez tart.(1,5 pont)

$$\lim_{x\to 1-0} \frac{2x^2 - 8x + 3}{x^2 - 2x + 1} = \cdots = \lim_{x\to 1-0} \frac{-4}{x-1}$$

Ha $x < 1$, akkor $x - 1 < 0$ azaz ekkor a nevező negatív lesz, emiatt a tört ∞-hez tart.(1,5 pont) Így nem tehető folytonossá a függvény. (1 pont)

4. Számítsa ki az alábbi függvény deriváltfüggvényét!

$$f(x) = \ln\left(\frac{x^2 + 3x}{2x + 1}\right) + \sin(x)\cos(x^2).$$

Megoldás:

$$f'(x) = \frac{1}{\frac{x^2+3x}{2x+1}} \frac{(2x+3)(2x+1) - (x^2+3x)2}{(2x+1)^2} + \cos(x)\cos(x^2) + \sin(x)(-\sin(x^2)2x).$$

(1+2+2 pont)

5*. Tekintsük az alábbi sorozatot:

$$\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{1}{4}, \frac{2}{4}, \frac{3}{4}, \frac{1}{5}, \frac{2}{5}, \frac{3}{5}, \frac{4}{5} \ \cdots \ \frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \ldots, \frac{n-1}{n}, \ldots$$

Konvergens-e ez a sorozat? Ha igen, mi a határértéke? Ha nem, miért nem?

Megoldás: A sorozat nem konvergens. (1 pont - csak gondolkodásra utaló jelek esetén adjuk meg!)

Az állítást indirekten bizonyíthatjuk. Tegyük fel, hogy a sorozat konvergál valamilyen A értékhez. Ez az A érték nem lehet a [0,1] intervallumon kívül, hiszen itt a sorozatnak nincsenek értékei. Tegyük fel tehát, hogy $A \in [0,1]$. Ha ez valóban határértéke a sorozatnak, ez azt jelentené, hogy egy bizonyos küszöbindexet követően a sorozat minden eleme benne van az $(A - \varepsilon, A + \varepsilon)$ intervallumban. Legyen például $\varepsilon = 0{,}1$, azaz egy bizonyos idő után a sorozat minden elemének az $(A - 0{,}1, A + 0{,}1)$ intervallumban kell lennie.

Ugyanakkor a sorozatból kiválasztható a $\dfrac{1}{n}$ részsorozat, melynek minden eleme egyre közelebb és közelebb kerül a nullához, valamint a $\dfrac{n-1}{n}$ részsorozat is, melynek pedig minden eleme egyre közelebb kerül az 1-hez. Ezen két részsorozat közül az egyik biztosan "ki fog ugrálni" a már említett $(A-0{,}1, A+0{,}1)$ intervallumból, ezért a sorozat nem lesz konvergens. (4 pont - más, megfelelő indoklás is elfogadható!)