Matematika G1 Második mintaZH

A dolgozaton 5+5+5+5+5=25 pont szerezhető. Munkaidő: 70 perc.

1. Számítsa ki az alábbi határértéket!

$$\lim_{x\to\pi/2} \frac{\cos^2(x)}{1-\sin(x)}.$$

Megoldás: A határérték 0/0 alakú, továbbá teljesülnek a tanult feltételek, ezért használhatjuk a l'Hospital szabályt (1 pont):

$$\lim_{x\to\pi/2} \frac{\cos^2(x)}{1-\sin(x)} = \lim_{x\to\pi/2} \frac{2\cos(x)(-\sin(x))}{-\cos(x)} =$$

(1+1 pont)

$$= \lim_{x\to\pi/2} 2\sin(x) = 2.$$

(2 pont)

Megjegyzés: A feladat megoldható más módokon is, például:

$$\lim_{x\to\pi/2} \frac{\cos^2(x)}{1-\sin(x)} = \lim_{x\to\pi/2} \frac{1-\sin^2(x)}{1-\sin(x)} = \lim_{x\to\pi/2} \frac{(1-\sin(x))(1+\sin(x))}{1-\sin(x)} = \lim_{x\to\pi/2} 1+\sin(x) = 2.$$

2. Adjuk meg az $r = (\cos(\varphi))^2$ polárkoordinátás módon megadott görbe érintőjének egyenletét a $\varphi_0 = \pi/4$ pontban!

Megoldás: A paraméteres egyenletek:

$$x(\varphi) = r\cos(\varphi) = (\cos(\varphi))^2\cos(\varphi) = (\cos(\varphi))^3.$$

$$y(\varphi) = r\sin(\varphi) = (\cos(\varphi))^2\sin(\varphi).$$

(1 pont) Az érintőhöz szükségünk lesz a $\varphi_0 = \pi/4$ pontbeli derivált értékére - ehhez a koordinátafüggvények deriváltjai:

$$x'(\varphi) = ((\cos(\varphi))^3)' = 3(\cos(\varphi))^2(-\sin(\varphi)).$$

$$y'(\varphi) = ((\cos(\varphi))^2\sin(\varphi))' = 2\cos(\varphi)(-\sin(\varphi))\sin(\varphi) + (\cos(\varphi))^2\cos(\varphi)$$

(1 pont) Így a derivált:

$$\frac{y'(\varphi)}{x'(\varphi)} = \frac{2\cos(\varphi)(-\sin(\varphi))\sin(\varphi) + (\cos(\varphi))^2\cos(\varphi)}{3(\cos(\varphi))^2(-\sin(\varphi))} =$$

$$= \frac{-2(\sin(\varphi))^2 + (\cos(\varphi))^2}{3\cos(\varphi)(-\sin(\varphi))}$$

Behelyettesítve a $\varphi_0 = \pi/4$ értéket kapjuk, hogy a derivált

$$\frac{-2\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2}{3\frac{\sqrt{2}}{2}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)} = \frac{-1+\frac{1}{2}}{-\frac{3}{2}} = \frac{1}{3}.$$

(1 pont) A további két szükséges érték:

$$x(\varphi_0) = (\cos(\varphi_0))^3 = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^3 = \frac{1}{2\sqrt{2}}$$

$$y(\varphi_0) = (\cos(\varphi_0))^2 \sin(\varphi_0) = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^3 = \frac{1}{2\sqrt{2}}$$

(1 pont) Így az érintő egyenlete:

$$y - \frac{1}{2\sqrt{2}} = \frac{1}{3}\left(x - \frac{1}{2\sqrt{2}}\right).$$

(1 pont)

3. Adja meg az alábbi függvény esetében azokat az intervallumokat, ahol ez monoton növő ill. csökkenő! Melyek a függvény szélsőértékei? (A választ csak táblázatos formában fogadjuk el!)

$$f(x) = (x^2 - 3)e^{-x}.$$

Megoldás: A függvény deriváltja:

$$f'(x) = (x^2e^{-x} - 3e^{-x})' = 2xe^{-x} - x^2e^{-x} + 3e^{-x} = e^{-x}(2x - x^2 + 3).$$

Ez akkor lehet nulla, ha a második tag nulla, ez pedig akkor teljesül, ha $x = -1$ és $x = 3$. (1 pont)

x	$(-\infty, -1)$	-1	$(-1,3)$	3	$(3, \infty)$
$f'(x)$	negatív	0	pozitív	0	negatív
$f(x)$	szig. mon. csökk.	lok. min.	szig. mon. nő	lok. max.	szig. mon. csökk.

(oszloponként 1+0,5+1+0,5+1 pont)

4. Számítsa ki az alábbi integrált!

$$\int (3x + 2)e^x dx$$

Megoldás:

$$\int (3x + 2)e^x dx = 3\int xe^x dx + 2\int e^x dx.$$

Az első tag parciális integrálással (használjuk a $v = x$, $u' = e^x$ választást, ahol $v' = 1$ és $u = e^x$):

$$\int xe^x dx = xe^x - \int e^x dx = xe^x - e^x + c.$$

(3 pont) A második tag:

$$2\int e^x dx = 2e^x + c$$

(2 pont) Így tehát

$$\int (3x + 2)e^x dx = 3(xe^x - e^x) + 2e^x + c = 3xe^x - e^x + c.$$

5*. Igazoljuk, hogy páratlan függvény deriváltja páros, páros függvény deriváltja páratlan!

Megoldás: Ha f páros, akkor $f(x) = f(-x)$ (1 pont), amit deriválva kapjuk, hogy $f'(x) = -f'(-x)$ tehát az f' páratlan. (1,5 pont) Hasonlóan, ha f páratlan, akkor $f(x) = -f(-x)$ (1 pont), amit deriválva kapjuk, hogy $f'(x) = f'(-x)$ tehát az f' páros. (1,5 pont)