Matematika G1 2023/24/2

Beadható szorgalmi feladatok

Határidő:

- Az 1-5. feladatok határideje: 8. hét csütörtöki előadás,
- Az 6-10. feladatok határideje: 13. hét csütörtöki előadás.

1. **Határérték definíciójának módosítása.** Tekintsük az alábbi módosításait a határérték jól ismert definíciójának:

   A) a_n egy olyan valós sorozat, hogy létezik egy $A \in \mathbb{R}$ konstans és létezik egy olyan $\varepsilon > 0$, amelyre minden $N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ esetén ha $n > N(\varepsilon)$, akkor $|a_n - A| < \varepsilon$.

   B) a_n egy olyan valós sorozat, hogy létezik egy $A \in \mathbb{R}$ konstans és létezik egy $N \in \mathbb{N}$, hogy minden $\varepsilon > 0$ esetén ha $n > N$, akkor $|a_n - A| < \varepsilon$.

   C) a_n egy olyan valós sorozat, hogy létezik egy $A \in \mathbb{R}$ konstans, hogy minden $\varepsilon > 0$ esetén minden $N \in \mathbb{N}$ esetén ha $n > N$, akkor $|a_n - A| < \varepsilon$.

   D) a_n egy olyan valós sorozat, hogy létezik egy $A \in \mathbb{R}$ konstans, hogy minden $\varepsilon > 0$ esetén létezik egy $N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ küszöbindex, hogyha $n < N(\varepsilon)$, akkor $|a_n - A| > \varepsilon$.

   Értelmezzük a tulajdonságokat! Minden esetben vizsgáljuk meg, létezik-e az adott tulajdonsággal rendelkező konvergens, ill. divergens sorozat! Adjunk ezekre példát (ha van)! Ha az adott tulajdonságnak létezik más, tanult neve, azt is adjuk meg (tulajdonságonként 1-1 pont).

2. **Rekurzív sorozat határértéke** Tekintsük az alábbi, rekurzívan adott sorozatot:

$$a_{n+1} = \frac{1}{2 - a_n}, \qquad a_0 = 0.$$

   a) Bizonyítsuk, hogy $a_n \leq a_{n+1}$. (0,5 pont)

   b) Számológép segítségével teszteljük le, hová tart a sorozat! Nevezzük ezt az értéket mostantól B-nek. Bizonyítsuk, hogy a sorozat elemeire $a_n \geq B - \frac{1}{10}$ teljesül, ha $n > 10$. (0,5 pont)

   c) Teljes indukcióval bizonyítsuk, hogy $0 \leq a_n \leq B$. (0,5 pont)

   d) A feladat b) részének általánosításával ($B - \varepsilon$ vizsgálatával) indirekten bizonyítsuk, hogy a_n valóban tart B-hez! (1 pont)

   Ha más lépésekkel bizonyítjuk az a_n sorozat konvergenciáját, akkor is jár az 2,5 pont!

3. **Függvényműveletek tulajdonságai.** Legyen $f(x)$ és $g(x)$ a $(-\infty, \infty)$ intervallumon értelmezve és legyen

   a) $f(x)$ páros, $g(x)$ páratlan,

   b) $f(x)$ páros, $g(x)$ páros,

   c) $f(x)$ páratlan, $g(x)$ páratlan.

   Mi mondható az a), b) és c) esetekben az $f(x) + g(x)$, $f(x) - g(x)$, $f(x) \cdot g(x)$ illetve $f(g(x))$ függvények paritásáról (páros/páratlan/egyik se)? Válaszunkat indokoljuk! (3 pont összesen, válaszonként 1/4 pont)

4. **Korlátosság és maximum.** Létezik-e olyan $f : (0{,}1) \to \mathbb{R}$ függvény, amely korlátos, de nincs maximuma? Mit mondhatunk, ha a függvény $[0{,}1]$-en van értelmezve? (0,5+0,5 pont)

5. **Határértékek összege.** Konstruáljunk olyan f és g függvényeket, amelyekre $\lim_{x\to 0} f(x) = \infty$, $\lim_{x\to 0} g(x) = -\infty$ és

   a) $\lim_{x\to 0}(f(x) + g(x))$ létezik és véges,

   b) $\lim_{x\to 0}(f(x) + g(x)) = \infty$,

   c) $\lim_{x\to 0}(f(x) + g(x)) = -\infty$,

   d) $\lim_{x\to 0}(f(x) + g(x))$ nem létezik.

   (Válaszonként 0,5 pont.)

6. **A $\cos(2x-4)$ függvény Taylor polinomja.** Tekintsük az $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \cos(2x-4)$ függvényt.

   a) Adjuk meg a függvény n-edfokú Taylor polinomját az $a = 1$ pont körül! (1 pont)

   b) Közelítsük a $\cos(2)$ értékét a másod-, negyed- és tizedfokú Taylor polinomokkal! Mekkorák ekkor a hibák (a pontos értéket számíthatjuk számológép segítségével)! (1 pont)

7. **Parciális integrálási paradoxon.** Tekintsük az alábbi gondolatmenetet:

$$0 = 0 \int x\, dx = \int 0 \cdot x\, dx = \int 0\, dx.$$

   Tanulmányainkból tudjuk, hogy $\int 0\, dx = C$ ahol C tetszőleges konstans. Hol a hiba?

8. **Nehéz integrál.** Számítsuk ki az alábbi határozatlan integrált!

$$\int \frac{1}{4+x^4}\, \mathrm{d}x$$

   A megoldás lépései:

   a) Bontsuk fel az $4+x^4$ kifejezést $(x^2+ax+b)(x^2-ax+b)$ alakban, azaz számítsuk ki az a és b pozitív konstansok értékét! (0,5 pont)

   b) A parciális törtekre bontáshoz hasonlóan bontsuk fel a hányadost két egyszerűbb hányados összegére! (1 pont)

   c) Az így kapott két tagot alakítsuk úgy (új tagok hozzáadásával), hogy lehessen használni a tanult módszereket! (1,5 pont)

9. **Riemann-integrálhatóság.** Tekintsük az alábbi, $f : [0{,}1] \to \mathbb{R}$ függvényt:

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{ha } x = \frac{1}{n}, \quad n = 1,\ 2,\ \ldots \\ 0 & \text{különben.} \end{cases}$$

   Riemann-integrálható ez a függvény? (2 pont)

10. **Gábriel harsonája módosítva.** Tekintsük az alábbi $f : (1,\infty) \to \mathbb{R}$ függvényt: $f(x) = x^{-\alpha}$ ahol $\alpha \in \mathbb{R}^+$. Mely $\alpha \neq 1$ értékek esetén kapunk az előadáson bemutatott Gábriel harsonájához hasonló paradoxont, azaz mely $\alpha \neq 1$ értékek esetén lesz a függvény görbéjének az x tengely körüli megforgatásával kapott forgástest térfogata véges, de felszíne végtelen? (4 pont)