Első mintazárthelyi

Matematika G3, 2023 ősz

1. (1. gyakorlat 8. feladat d)) Adjuk meg az $A : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ leképezés szimmetrikus és antiszimmetrikus részének mátrixát, az első, a második és a harmadik skalárinvariánsát illetve a vektorinvariánsát, ahol A a z tengely körüli 90 fokos forgatás, majd tükrözés az $x - y$ síkra! (10 pont)

2. (2. gyakorlat 2. feladatához hasonló) Szemléltessük az alábbi összefüggést az $u(x, y, z) = x^2y^2z^2$ és $v(x, y, z) = (yz, xz, xy)$ függvények segítségével! (10 pont)
$$\mathrm{rot}(uv) = u\,\mathrm{rot}(v) - v \times \mathrm{grad}(u).$$

   Megoldás: Itt $uv = (x^2y^3z^3, x^3y^2z^3, x^3y^3z^2)$, azaz így
$$\mathrm{rot(uv)} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ \partial_x & \partial_y & \partial_z \\ x^2y^3z^3 & x^3y^2z^3 & x^3y^3z^2 \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} 3x^3y^2z^2 - 3x^3y^2z^2 \\ 3x^2y^3z^2 - 3x^2y^3z^2 \\ 3x^2y^2z^3 - 3x^2y^2z^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$
   (3 pont) Hasonlóan,
$$\mathrm{rot(v)} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ \partial_x & \partial_y & \partial_z \\ yz & xz & xy \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} x - x \\ y - y \\ z - z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$
   így $u\mathrm{rot}(v) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. (3 pont) Ugyanígy,
$$v \times \mathrm{grad}(u) = (yz, xz, xy) \times \begin{pmatrix} 2xy^2z^2 \\ 2x^2yz^2 \\ 2x^2y^2z \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ yz & xz & xy \\ 2xy^2z^2 & 2x^2yz^2 & 2x^2y^2z \end{vmatrix} =$$
$$= \begin{pmatrix} 2x^3y^2z^2 - 2x^3y^2z^2 \\ 2x^2y^3z^2 - 2x^2y^3z^2 \\ 2x^2y^2z^3 - 2x^2y^2z^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$
   (4 pont). Az állítás általános bizonyítása esetén is jár a 10 pont.

3. Adjuk meg a $v(x, y, z) = \left(2xyz, x^2z, x^2y\right)$ vektormező integrálját a $z = 3$ síkban fekvő $x^2 + y^2 = 1$ körnek az $A(1, 0, 3)$ és $B\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 3\right)$ pontok közötti íve mentén,

   (a) (3. gyakorlat 1. feladat f)) a görbe paraméterezésének segítségével, (10 pont)

   (b) (3. gyakorlat 5. feladat) potenciálelmélet segítségével: vizsgáljuk meg, hogy potenciálos-e a mező, és ha igen, számítsuk ki a vonalintegrált a potenciálfüggvény segítségével! (15 pont)

   (Ha az adott feladat megoldható Stokes tétel segítségével (ez most nem), arra a megoldásra is további 15 pont jár.)

4. Számítsuk ki a $v(x, y, z) = (2x, 2y, 2z)$ vektormezőnek a

$$V = \left\{(x, y, z) : x^2 + y^2 \leq 1,\ z = 1 - \sqrt{x^2 + y^2}\right\}$$

   felületen vett felületi integrálját a z tengelytől távolodó irányban

   (a) (4. gyakorlat 2. feladat) a felület paraméterezésével, majd a felületi integrál direkt kiszámításával (15 pont),

   (b) (5. gyakorlat 1. feladat) a Gauss-Osztrogradszkij tétel segítségével! (15 pont)