

Első mintazárthelyi

Matematika G3, 2025 ősz

1. (1. gyakorlat 8. feladat d)) Adjuk meg az $A : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ leképezés szimmetrikus és antiszimmetrikus részének mátrixát, az első, a második és a harmadik skalárinvariánsát illetve a vektorinvariánsát, ahol A a z tengely körüli 90 fokos forgatás, majd tükrözés az $x - y$ síkra! (10 pont)
2. (2. gyakorlat 2. feladatához hasonló) Szemléltessük az alábbi összefüggést az $u(x, y, z) = x^2 y^2 z^2$ és $v(x, y, z) = (yz, xz, xy)$ függvények segítségével! (10 pont)

$$\text{rot}(uv) = u \text{ rot}(v) - v \times \text{grad}(u).$$

Megoldás: Itt $uv = (x^2 y^3 z^3, x^3 y^2 z^3, x^3 y^3 z^2)$, azaz így

$$\text{rot}(uv) = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \partial_x & \partial_y & \partial_z \\ x^2 y^3 z^3 & x^3 y^2 z^3 & x^3 y^3 z^2 \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} 3x^3 y^2 z^2 - 3x^3 y^2 z^2 \\ 3x^2 y^3 z^2 - 3x^2 y^3 z^2 \\ 3x^2 y^2 z^3 - 3x^2 y^2 z^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

(3 pont) Hasonlóan,

$$\text{rot}(v) = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \partial_x & \partial_y & \partial_z \\ yz & xz & xy \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} x - x \\ y - y \\ z - z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

így $u \text{ rot}(v) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. (3 pont) Ugyanígy,

$$\begin{aligned} v \times \text{grad}(u) &= (yz, xz, xy) \times \begin{pmatrix} 2xy^2 z^2 \\ 2x^2 y z^2 \\ 2x^2 y^2 z \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ yz & xz & xy \\ 2xy^2 z^2 & 2x^2 y z^2 & 2x^2 y^2 z \end{vmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} 2x^3 y^2 z^2 - 2x^3 y^2 z^2 \\ 2x^2 y^3 z^2 - 2x^2 y^3 z^2 \\ 2x^2 y^2 z^3 - 2x^2 y^2 z^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

(4 pont). Az állítás általános bizonyítása esetén is jár a 10 pont.

3. Adjuk meg a $v(x, y, z) = (2xyz, x^2z, x^2y)$ vektormező integrálját a $z = 3$ síkban fekvő $x^2 + y^2 = 1$ körnek az $A(1, 0, 3)$ és $B\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 3\right)$ pontok közötti íve mentén,

- (a) (3. gyakorlat 1. feladat f)) a görbe paraméterezésének segítségével, (10 pont)
- (b) (3. gyakorlat 5. feladat) potenciálmélet segítségével: vizsgáljuk meg, hogy potenciális-e a mező, és ha igen, számítsuk ki a vonalintegrált a potenciálfüggvény segítségével! (15 pont)

(Ha az adott feladat megoldható Stokes tétel segítségével (ez most nem), arra a megoldásra is további 15 pont jár.)

4. Tekintsük az alábbi felületet:

$V = \{ \text{az } y = 0 \text{ síkban elhelyezkedő, origó középpontú 3 sugarú kör és az } y = 4 \text{ síkban elhelyezkedő, origó középpontú 2 sugarú körlapok által határolt, az } y \text{ tengelyre forgásszimmetrikus egyenes csonka kúp palástja (tehát az alaplappal és a fedőlap nélkül). } \}$.

Számítsuk ki a $v(x, y, z) = (2x, 2y, 2z)$ vektormezőnek ezen a felületen vett felületi integrálját az y tengelytől távolodó irányban

- (a) (4. gyakorlat 4. feladat) a felület paraméterezésével, majd a felületi integrál direkt kiszámításával (15 pont),
- (b) (5. gyakorlat 5. feladat) a Gauss-Osztrogradszkij tétel segítségével! (15 pont)