

Numerikus analízis labor

Beszámoló lehetséges feladatai

2025

1. (2. gyakorlat 6. feladat) Tekintsük az alábbi integrált:

$$I_n = \int_0^1 \frac{x^n}{10+x} dx.$$

Belátható, hogy erre $I_n \geq 0$ és $I_n \rightarrow 0$ teljesül, valamint

$$I_n = \frac{1}{n} - 10I_{n-1}.$$

Írjunk Matlab függvényt, mely adott n -ig kiszámolja a rekurzió lépéseinek értékeit (a kód bemenete legyen n). Mit tapasztalunk nagy n értékek esetén? Hogyan lehetne ezt javítani?

2. (3. gyakorlat 3., és 4. gyakorlat 4. feladatok anyagához hasonló) Tekintsük az alábbi pontpárokat:

x_k	-2	-1	0	1	2	3
y_k	3	1.5	0.8	0.3	-0.1	1.3

Illesszünk ezen pontokra legkisebb négyzetek értelemben közelítő első, másod és harmadrendű polinomokat, valamint alkalmazzunk lineáris, szakaszonként harmadfokú Hermite, és köbös spline interpolációt is! A kapott függvényeket ábrázoljuk!

3. (5. gyakorlat 3. (d) feladat) Tekintsük az alábbi integrált:

$$\int_0^2 \frac{1}{1+x^2} dx.$$

Írjunk kódot, amely a fenti integrált számítja ki tetszőleges, N darab kisebb intervallumra való felosztás esetén az összetett érintő, összetett trapéz és összetett Simpson módszerek segítségével! Ábrázoljuk a hibákat N függvényében egy log-log grafikonon! Mit tapasztalunk?

4. (6. gyakorlat 2. feladat) Tekintsük az alábbi függvényt:

$$f(x) = x^3 + 2x^2 + 10x - 20.$$

Ennek keressük a zérushelyét a fixpont iteráció segítségével az $[1, 2]$ intervallumon. Az alábbi kettő algoritmust vizsgáljuk:

$$x_{k+1} = x_k + (-0.01) \cdot (x_k^3 + 2x_k^2 + 10x_k - 20), \quad x_{k+1} = \frac{20}{x_k^2 + 2x_k + 10}.$$

A Matlabban a megfelelő függvények ábrázolásával magyarázzuk meg, miért lesznek konvergenssek a módszerek! Kódoljuk is le őket: a módszerek addig fussanak, amíg az egymást követő x_k értékek távolságának absz. értéke már kisebb, mint 10^{-10} . Melyik a gyorsabb?

5. (6. gyakorlat 3. feladat) Keressük meg azt az értéket, ahol alábbi függvény felveszi a 2 értéket! Keressük ezt az $[1, 2]$ intervallumon intervallumfelezés segítségével! A kód álljon le, ha a függvény adott pontbeli értéke és a keresett 2 érték közötti távolság abszolútértékben már kisebb, mint 10^{-10} .

$$f(x) = x^5 - x.$$

6. (7. gyakorlat 3. feladat) Tekintsük az alábbi egyenletrendszert:

$$\begin{cases} 5x^2 - y^2 = 0, \\ y - 0.25(\sin(x) + \cos(y)) = 0. \end{cases}$$

Newton módszer segítségével keressük ennek az $(x_0, y_0) = (0.25, 0.25)$ pont környezetében lévő megoldását!

7. (8. gyakorlati anyag, megoldását lásd a honlapon) Legyen b az N hosszú ($N \in \mathbb{Z}^+$), csupa egyesekből álló vektor, valamint tekintsük az alábbi, $N \times N$ -es mátrixot:

$$A = \begin{pmatrix} N & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & N & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & N & \dots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \dots & N \end{pmatrix}.$$

Írjunk kódot, ami N bemeneti paraméter mellett megoldja az $Ax = b$ egyenletrendszert 1000-szer, az alábbi három módon:

- a Matlab beépített megoldójával,
- az A mátrix LU felbontását követően a kapott $2N$ egyenletből álló egyenletrendszert a beépített Matlab megoldóval (az LU-hoz használhatjuk a Matlab beépített parancsát),

- valamint a fenti mátrix Cholesky felbontását követően a kapott $2N$ egyenletből álló rendszert szintén a beépített Matlab parancs segítségével (ehhez a felbontáshoz is használható beépített Matlab parancs).

Mindhárom futás esetén a `tic` és `toc` parancsok segítségével mérjük az időt, és a három kapott időérték legyen a program három outputja! Ezt követően a futásokat ábrázoljuk $N = 1, 2, \dots, 100$ esetén egy grafikonon! Mit tapasztalunk?

8. (9. gyakorlat 3. feladat) Tekintsük az alábbi egyenletrendszert:

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Oldjuk meg ezt a rendszert Jacobi és Gauss-Seidel iterációk segítségével! A kód addig fusson, amíg az egymás követő vektorok különbségének maximumnormája már kisebb, mint 10^{-7} , és induljon a $(0, 0)^T$ vektorból!

9. (9. gyakorlat 2. (b) feladat) Írjunk kódot, ami adott ω esetén lefuttatja a relaxált Jacobi (vagy relaxált Gauss-Seidel) iterációt, és futtasuk ezt a $[0, 1]$ intervallumon vett 10 különböző ω érték esetén addig, amíg az egymást követő lépések különbsége már 2-es normában kisebb, mint 10^{-6} . Ábrázoljuk minden ω esetén a lépésszámokat! Mit mondhatunk, melyik ω -t érdemes választani? Hogyan lehetne ezt az ω értéket pontosan kiszámítani?

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

10. (10. gyakorlat 1. feladat) Oldjuk meg az alábbi egyenletet implicit Euler módszer segítségével a $[0, 10]$ intervallumon és $h = 5$ lépésközökkel! Az implicit egyenletet oldjuk meg Newton iterációt alkalmazva (ez addig fusson, amíg az egymás követő értékek különbsége már kisebb, mint 10^{-8} , és a kezdeti érték legyen mindig az előző lépésben kiszámolt y)!

$$\begin{cases} y'(t) = \arctg(y(t)), \\ y(0) = 1. \end{cases}$$

11. (10. gyakorlat 3. feladat) Oldjuk meg explicit Euler módszerrel az alábbi egyenletrendszert a $t \in [0, 1]$ intervallumon $h = 0.2$ -vel és $u_1(0) = 2$, $u_2(0) = -3$ kezdeti értékekkel!

$$\begin{cases} u_1'(t) = 8u_1(t) + 9u_2(t), \\ u_2'(t) = -18u_1(t) - 19u_2(t). \end{cases}$$