Matematika G1 2023/24/2

Elméleti kérdések

A vizsgán az alábbi listából fog szerepelni tíz állítás, és ezekről kell majd eldönteni, hogy ezek igazak-e, vagy sem.

1 Numerikus sorozatok

1.1 Konvergencia fogalma

1. Egy a_n valós numerikus sorozat határértéke $A \in \mathbb{R}$, ha minden $\varepsilon > 0$ esetén létezik egy $N(\varepsilon)$ küszöbindex, amelyre minden n, $n > N(\varepsilon)$ esetén $|a_n - A| < \varepsilon$ teljesül.
2. Egy a_n valós numerikus sorozat határértéke $A \in \mathbb{R}$, ha minden $\varepsilon > 0$ esetén létezik egy $N(\varepsilon)$ küszöbindex, amelyre minden n, $n > \varepsilon$ esetén $|a_n - A| < N(\varepsilon)$ teljesül.
3. Egy a_n valós numerikus sorozat határértéke $A \in \mathbb{R}$, ha létezik egy $\varepsilon > 0$ érték, hogy minden $N(\varepsilon)$ küszöbindex esetén minden n, $n > N(\varepsilon)$ értékre $|a_n - A| < \varepsilon$ teljesül.
4. Egy a_n valós numerikus sorozat határértéke $A \in \mathbb{R}$, ha létezik egy $N(\varepsilon)$ küszöbindex, hogy minden $\varepsilon > 0$ esetén minden n, $n > N(\varepsilon)$ értékre $|a_n - A| < \varepsilon$ teljesül.
5. Egy a_n valós numerikus sorozat határértéke végtelen, ha minden $\Omega > 0$ esetén létezik egy $N(\Omega)$ küszöbindex, amelyre minden n, $n > N(\Omega)$ esetén $a_n > \Omega$ teljesül.
6. Egy a_n valós numerikus sorozat határértéke végtelen, ha minden $\Omega > 0$ esetén létezik egy $N(\Omega)$ küszöbindex, amelyre minden n, $n > N(\Omega)$ esetén $a_n < \Omega$ teljesül.
7. Egy a_n valós numerikus sorozat határértéke végtelen, ha minden $\Omega > 0$ esetén létezik egy $N(\Omega)$ küszöbindex, amelyre minden n, $n > \Omega$ esetén $a_n > N(\Omega)$ teljesül.
8. Egy a_n valós numerikus sorozat határértéke végtelen, ha létezik egy $N(\Omega)$ küszöbindex, hogy minden $\Omega > 0$ esetén minden n, $n > N(\Omega)$ értékre $a_n > \Omega$ teljesül.
9. Egy a_n valós numerikus sorozat határértéke végtelen, ha létezik egy $\Omega > 0$ érték, hogy minden $N(\Omega)$ küszöbindex esetén minden n, $n > N(\Omega)$ értékre $a_n > \Omega$ teljesül.
10. Minden valós sorozatnak csak egy határértéke lehet.
11. Van olyan valós sorozat, melynek két határértéke van.
12. Minden valós sorozatnak pontosan egy határértéke van.
13. Egy valós sorozat konvergens, ha létezik egy valós határértéke.
14. Egy valós sorozat divergens, ha nem létezik határértéke.
15. Egy végtelenbe tartó valós sorozat konvergens.
16. Egy végtelenbe tartó valós sorozat divergens.
17. Egy valós sorozat háromféleképpen viselkedhet: vagy egy valós számhoz, vagy a végtelenbe, vagy a mínusz végtelenbe tart.

1.2 Korlátosság

18. Egy a_n valós sorozat korlátos, ha van egy olyan $K > 0$ érték, amelyre $|a_n| < K$.
19. Egy a_n valós sorozat korlátos, ha van egy olyan $K > 0$ érték, amelyre $|a_n| > K$.
20. Egy a_n valós sorozat korlátos, ha minden $K > 0$ érték esetén $|a_n| < K$.
21. Ha egy sorozat korlátos, akkor konvergens.
22. Ha egy sorozat konvergens, akkor korlátos.
23. Egy valós sorozat pontosan akkor konvergens, ha korlátos.
24. Van olyan valós sorozat, ami konvergens, de nem korlátos.
25. Van olyan valós sorozat, ami korlátos, de nem konvergens.

1.3 Monoton sorozatok

26. Egy a_n valós sorozat monoton növekedő, ha minden $n \in \mathbb{N}$ esetén $a_n \leq a_{n+1}$.
27. Egy a_n valós sorozat monoton növekedő, ha minden $n \in \mathbb{N}$ esetén $a_n \geq a_{n+1}$.
28. Egy a_n valós sorozat monoton növekedő, ha van olyan $n \in \mathbb{N}$ érték, amelyre $a_n \leq a_{n+1}$.
29. Egy a_n valós sorozat monoton csökkenő, ha minden $n \in \mathbb{N}$ esetén $a_n \geq a_{n+1}$.
30. Egy a_n valós sorozat monoton csökkenő, ha minden $n \in \mathbb{N}$ esetén $a_n \leq a_{n+1}$.
31. Egy a_n valós sorozat monoton csökkenő, ha van olyan $n \in \mathbb{N}$ érték, amelyre $a_n \geq a_{n+1}$.
32. Ha egy valós sorozat monoton és korlátos, akkor konvergens.
33. Ha egy valós sorozat monoton és konvergens, akkor korlátos.
34. Ha egy valós sorozat konvergens és korlátos, akkor monoton.
35. Van olyan valós sorozat, ami monoton és korlátos, de nem konvergens.
36. Van olyan valós sorozat, ami monoton és konvergens, de nem korlátos.
37. Van olyan valós sorozat, ami konvergens és korlátos, de nem monoton.

1.4 Rendőr elv

38. Ha a_n, b_n és c_n valós sorozatokra teljesül, hogy $a_n \leq b_n \leq c_n$ és $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} c_n = A$, akkor $\lim_{n\to\infty} b_n = A$.
39. Ha a_n, b_n és c_n valós sorozatokra teljesül, hogy $a_n \leq b_n \leq c_n$ és $\lim\limits_{n\to\infty} a_n \leq A \leq \lim\limits_{n\to\infty} c_n$, akkor $\lim_{n\to\infty} b_n = A$.
40. Ha a_n, b_n és c_n valós sorozatokra teljesül, hogy $a_n \leq b_n \leq c_n$ és $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} b_n = A$, akkor $\lim_{n\to\infty} c_n = A$.
41. Ha a_n, b_n és c_n valós sorozatokra teljesül, hogy $a_n \leq b_n \leq c_n$ és $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = \lim\limits_{n\to\infty} c_n = A$, akkor $\lim_{n\to\infty} a_n = A$.

1.5 Nevezetes határértékek

42. Ha $k > 0$, akkor $\lim\limits_{n\to\infty} n^k = \infty$.

43. Ha $k > 1$, akkor $\lim\limits_{n\to\infty} n^k = \infty$.

44. Ha $|k| < 1$, akkor $\lim\limits_{n\to\infty} n^k = 0$.

45. Ha $k < 0$, akkor $\lim\limits_{n\to\infty} n^k = 0$.

46. Ha $k < -1$, akkor $\lim\limits_{n\to\infty} n^k = 0$.

47. Ha $k < -1$, akkor $\lim\limits_{n\to\infty} n^k = -\infty$.

48. Ha $k < -1$, akkor $\lim\limits_{n\to\infty} n^k$ divergál.

49. Ha $k < 0$, akkor $\lim\limits_{n\to\infty} n^k = -\infty$.

50. Ha $k < 0$, akkor $\lim\limits_{n\to\infty} n^k = 1$.

51. Ha $k = 0$, akkor $\lim\limits_{n\to\infty} n^k = 1$.

52. Ha $k = 0$, akkor $\lim\limits_{n\to\infty} n^k = 0$.

53. $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$.

54. $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = e$.

55. $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 0$.

56. $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = \infty$.

57. $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt{n} = 1$.

58. $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{c} = 1$ ahol $c > 0$ tetszőleges rögzített konstans.

59. $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{c} = 0$ ahol $c > 0$ tetszőleges rögzített konstans.

60. $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{c}$ (ahol $c > 0$ tetszőleges rögzített konstans) értéke c értékétől függően lehet 0, 1 vagy ∞.

61. $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{c}$ (ahol $c > 0$ tetszőleges rögzített konstans) értéke c értékétől függően lehet 0, 1 vagy divergálhat.

62. $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt{c} = 1$ ahol $c > 0$ tetszőleges rögzített konstans.

63. Ha $|q| < 1$, akkor $\lim\limits_{n\to\infty} q^n = 0$.

64. Ha $|q| < 1$, akkor $\lim\limits_{n\to\infty} q^n = 1$.

65. Ha $q > 0$, akkor $\lim\limits_{n\to\infty} q^n = \infty$.

66. Ha $q < 1$, akkor $\lim\limits_{n\to\infty} q^n = 0$.

67. Ha $|q| < 1$, akkor $\lim\limits_{n\to\infty} q^n = \infty$.

68. Ha $q > 1$, akkor $\lim\limits_{n\to\infty} q^n = \infty$.

69. Ha $|q| > 1$, akkor $\lim\limits_{n\to\infty} q^n = \infty$.

70. Ha $q < -1$, akkor $\lim\limits_{n\to\infty} q^n = -\infty$.

71. Ha $q < 0$, akkor $\lim\limits_{n\to\infty} q^n = 0$.

72. Ha $q < -1$, akkor $\lim\limits_{n\to\infty} q^n$ divergál.

73. Ha $q < -1$, akkor $\lim\limits_{n\to\infty} q^n = 0$.

74. Ha $q = 0$, akkor $\lim\limits_{n\to\infty} q^n = 1$.

75. Ha a_n korlátos valós sorozat és b_n valós sorozatra $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = 0$, akkor $a_n \cdot b_n \to 0$.

76. Ha a_n konvergens valós sorozat és b_n valós sorozatra $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = 0$, akkor $a_n \cdot b_n \to 0$.

77. Ha a_n korlátos valós sorozat és b_n valós sorozatra $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = 0$, akkor $a_n \cdot b_n$ korlátos.

78. Ha a_n korlátos valós sorozat és b_n valós sorozatra $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = 1$, akkor $a_n \cdot b_n \to 1$.

79. $\lim\limits_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$.

80. $\lim\limits_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e^n$.

81. $\lim\limits_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = 1$.

82. $\lim\limits_{n\to\infty} \left(n + \frac{1}{n}\right)^n = e$.

83. $\lim\limits_{n\to\infty} \left(1 + \frac{n}{1}\right)^n = e$.

1.6 Módosított sorozatok

84. Ha a_n konvergens sorozat és b_n divergál, akkor a $a_1, b_1, a_2, b_2, a_3, b_3, \ldots$ sorozat is divergál.

85. Ha a_n konvergens sorozat és b_n divergál, akkor a $a_1, b_1, a_2, b_2, a_3, b_3, \ldots$ sorozat is konvergál.

86. Ha a_n konvergens sorozat és b_n is konvergál, akkor a $a_1, b_1, a_2, b_2, a_3, b_3, \ldots$ sorozat is konvergál.

87. Ha a_n konvergens sorozat és b_n is konvergál, akkor a $a_1, b_1, a_2, b_2, a_3, b_3, \ldots$ sorozat csak akkor konvergál, ha a_n és b_n határértékei megegyeznek.

88. Ha a_n konvergens sorozat A-hoz tart, akkor az $a_1 + a_2, a_2 + a_3, a_3 + a_4, \ldots$ sorozat divergál.

89. Ha a_n konvergens sorozat A-hoz tart, akkor az $a_1 + a_2, a_2 + a_3, a_3 + a_4, \ldots$ sorozat konvergál A-hoz.

90. Ha a_n konvergens sorozat A-hoz tart, akkor az $a_1 + a_2, a_2 + a_3, a_3 + a_4, \ldots$ sorozat konvergál $2A$-hoz.

91. Ha a_n konvergens sorozat A-hoz tart, akkor az $a_1 + a_2, a_2 + a_3, a_3 + a_4, \ldots$ sorozat konvergálhat vagy divergálhat.

92. Ha a_n konvergens sorozat A-hoz tart, akkor az $a_1 - a_2, a_2 - a_3, a_3 - a_4, \ldots$ sorozat konvergál A-hoz.

93. Ha a_n konvergens sorozat A-hoz tart, akkor az $a_1 - a_2, a_2 - a_3, a_3 - a_4, \ldots$ sorozat konvergál 0-hoz.

94. Ha a_n konvergens sorozat A-hoz tart, akkor az $a_1 - a_2, a_2 - a_3, a_3 - a_4, \dots$ sorozat konvergálhat vagy divergálhat.

95. Ha a_n konvergens sorozat A-hoz tart, akkor az $a_1 \cdot a_2, a_2 \cdot a_3, a_3 \cdot a_4, \dots$ sorozat konvergálhat vagy divergálhat.

96. Ha a_n konvergens sorozat A-hoz tart, akkor az $a_1 \cdot a_2, a_2 \cdot a_3, a_3 \cdot a_4, \dots$ sorozat konvergál A-hoz.

97. Ha a_n konvergens sorozat A-hoz tart, akkor az $a_1 \cdot a_2, a_2 \cdot a_3, a_3 \cdot a_4, \dots$ sorozat konvergál A^2-hez.

98. Ha a_n konvergens sorozat A-hoz tart, akkor az $a_1 \cdot a_2, a_2 \cdot a_3, a_3 \cdot a_4, \dots$ sorozat csak akkor konvergál, ha $A = 0$.

99. Ha a_n konvergens sorozat A-hoz tart, akkor az $\frac{a_1}{a_2}, \frac{a_2}{a_3}, \frac{a_3}{a_4}, \dots$ sorozat tart az 1-hez ha $A \neq 0$.

100. Ha a_n konvergens sorozat A-hoz tart, akkor az $\frac{a_1}{a_2}, \frac{a_2}{a_3}, \frac{a_3}{a_4}, \dots$ sorozat tart az 1-hez.

101. Ha véges sok elemet elhagyunk egy sorozatból, akkor annak konvergenciája megváltozhat.

102. Ha véges sok elemet elhagyunk egy sorozatból, akkor annak konvergenciája nem változik.

103. Ha véges sok elemet hozzáírunk egy sorozathoz, akkor annak konvergenciája megváltozhat.

104. Ha véges sok elemet hozzáírunk egy sorozathoz, akkor annak konvergenciája nem változik.

105. Ha véges sok elemet kitörlünk egy sorozatból, akkor annak konvergenciája megváltozhat.

106. Ha véges sok elemet kitörlünk egy sorozatból, akkor annak konvergenciája nem változik.

1.7 Torlódási pontok, infimum és szuprémum

107. Egy valós sorozat infimuma a sorozat legnagyobb alsó korlátja.

108. Egy valós sorozat infimuma a sorozat legkisebb alsó korlátja.

109. Egy valós sorozat szuprémuma a sorozat legkisebb felső korlátja.

110. Egy valós sorozat szuprémuma a sorozat legnagyobb felső korlátja.

111. Egy valós sorozat torlódási pontja egy olyan pont, melynek tetszőleges környezetében található a sorozatnak legalább egy, a ponttól különböző eleme.

112. Egy valós sorozat torlódási pontja egy olyan pont, melynek tetszőleges környezetében található a sorozatnak végtelen sok eleme.

113. Egy valós sorozat limesz szuperiorja a sorozat legnagyobb torlódási pontja.

114. Egy valós sorozat limesz szuperiorja a sorozat legkisebb felső korlátja.

115. Egy valós sorozat limesz inferiorja a sorozat legkisebb torlódási pontja.

116. Egy valós sorozat limesz inferiorja a sorozat legnagyobb alsó korlátja.

2 Függvények határértéke

2.1 Függvények - bevezetés

117. Egy $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$ egész együtthatós polinom minden egész gyöke osztója a_0-nak.

118. Egy $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$ egész együtthatós polinom minden egész gyöke osztója a_n-nek.

119. Egy $f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$ egész együtthatós polinom minden egész gyökének osztója a_0.

120. Egy $f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$ polinom minden egész gyöke osztója a_0-nak.

121. Egy $f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$ egész együtthatós polinom minden gyöke osztója a_0-nak.

122. Az arcsin függvény a $[-1, 1]$ intervallumon értelmezett, és értékei a $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ intervallumból kerülnek ki.

123. Az arcsin függvény a $[-1, 1]$ intervallumon értelmezett, és értékei a $[0, \pi]$ intervallumból kerülnek ki.

124. Az arcsin függvény a $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ intervallumon értelmezett, és értékei a $[-1, 1]$ intervallumból kerülnek ki.

125. Az arccos függvény a $[-1, 1]$ intervallumon értelmezett, és értékei a $[0, \pi]$ intervallumból kerülnek ki.

126. Az arccos függvény a $[-1, 1]$ intervallumon értelmezett, és értékei a $.\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ intervallumból kerülnek ki.

127. Az arccos függvény a $[0, \pi]$ intervallumon értelmezett, és értékei a $[-1, 1]$ intervallumból kerülnek ki.

128. Az arctg függvény minden valós számon értelmezett, és értékei a $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ intervallumból kerülnek ki.

129. Az arctg függvény a $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ intervallumon értelmezett, és értékként minden valós számot felvesz valahol.

130. Az $\operatorname{arctg}(x) = \dfrac{\arcsin(x)}{\arccos(x)}$ összefüggés teljesül minden értékre az $x \in [-1, 1]$ intervallumon.

131. $\operatorname{sh}(x) = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$.

132. $\operatorname{sh}(x) = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$.

133. $\operatorname{sh}(x) = \dfrac{e^x - e^x}{2}$.

134. $\operatorname{sh}(x) = e^x - e^{-x}$.

135. $\operatorname{ch}(x) = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$.

136. $\operatorname{ch}(x) = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$.

137. $\operatorname{ch}(x) = \dfrac{e^x + e^x}{2}$.

138. $\operatorname{ch}(x) = e^x + e^{-x}$.

2.2 Függvények tulajdonságai

139. Egy $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvény páros, ha $f(x) = f(-x)$ teljesül minden $x \in \mathrm{Dom}(f)$ esetén.

140. Egy $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvény páros, ha $f(x) = -f(x)$ teljesül minden $x \in \mathrm{Dom}(f)$ esetén.

141. Egy $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvény páros, ha $f(x) = -f(-x)$ teljesül minden $x \in \mathrm{Dom}(f)$ esetén.

142. Egy $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvény páros, ha grafikonja szimmetrikus az y tengelyre.

143. Egy $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvény páros, ha grafikonja szimmetrikus az x tengelyre.

144. Egy $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvény páros, ha grafikonja középpontosan szimmetrikus az origóra.

145. Egy $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvény páratlan, ha $f(x) = -f(-x)$ teljesül minden $x \in \mathrm{Dom}(f)$ esetén.

146. Egy $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvény páratlan, ha $f(x) = f(-x)$ teljesül minden $x \in \mathrm{Dom}(f)$ esetén.

147. Egy $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvény páratlan, ha $f(x) = -f(x)$ teljesül minden $x \in \mathrm{Dom}(f)$ esetén.

148. Egy $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvény páratlan, ha grafikonja szimmetrikus az y tengelyre.

149. Egy $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvény páratlan, ha grafikonja szimmetrikus az x tengelyre.

150. Egy $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvény páratlan, ha grafikonja középpontosan szimmetrikus az origóra.

151. Egy $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvény monoton növekvő az $[a, b]$ intervallumon, ha minden $x, y \in [a, b] \cap \mathrm{Dom}(f)$ pontra ha $x \leq y$, akkor $f(x) \leq f(y)$.

152. Egy $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvény monoton növekvő az $[a, b]$ intervallumon, ha minden $x, y \in [a, b] \cap \mathrm{Dom}(f)$ pontra ha $x \geq y$, akkor $f(x) \leq f(y)$.

153. Egy $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvény monoton növekvő az $[a, b]$ intervallumon, ha minden $x, y \in [a, b] \cap \mathrm{Dom}(f)$ pontra ha $x \leq y$, akkor $f(x) \geq f(y)$.

154. Egy $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvény monoton csökkenő az $[a, b]$ intervallumon, ha minden $x, y \in [a, b] \cap \mathrm{Dom}(f)$ pontra ha $x \leq y$, akkor $f(x) \geq f(y)$.

155. Egy $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvény monoton csökkenő az $[a, b]$ intervallumon, ha minden $x, y \in [a, b] \cap \mathrm{Dom}(f)$ pontra ha $x \leq y$, akkor $f(x) \leq f(y)$.

156. Egy $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvény monoton csökkenő az $[a, b]$ intervallumon, ha minden $x, y \in [a, b] \cap \mathrm{Dom}(f)$ pontra ha $x \geq y$, akkor $f(x) \geq f(y)$.

157. Egy $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvény periodikus, ha létezik egy olyan $p > 0$ érték, amely esetén tetszőleges $x \in \mathrm{Dom}(f)$ esetén ha $x + p \in \mathrm{Dom}(f)$, akkor $f(x) = f(x + p)$.

158. Egy $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvény periodikus, ha létezik egy olyan $p > 0$ érték, amely esetén tetszőleges $x \in \mathrm{Dom}(f)$ esetén ha $x + p \in \mathrm{Dom}(f)$, akkor $f(x) < f(x + p)$.

159. Egy $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvény periodikus, ha létezik egy olyan $p > 0$ érték, amely esetén tetszőleges $x \in \mathrm{Dom}(f)$ esetén ha $x + p \in \mathrm{Dom}(f)$, akkor $f(x) > f(x + p)$.

2.3 Függvény határértékének definíciója

160. Tekintsünk egy $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvényt és legyen a torlódási pontja $\mathrm{Dom}(f)$-nek. $\lim\limits_{x \to a} f(x) = A$, ha minden $\varepsilon > 0$ esetén létezik egy $\delta > 0$ érték, amely esetén minden $x \in \mathrm{Dom}(f) \setminus \{a\}$ pontra ha $|x - a| < \delta$, akkor $|f(x) - A| < \varepsilon$ teljesül.

161. Tekintsünk egy $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvényt és legyen a torlódási pontja $\mathrm{Dom}(f)$-nek. $\lim\limits_{x \to a} f(x) = A$, ha minden $\delta > 0$ esetén létezik egy $\varepsilon > 0$ érték, amely esetén minden $x \in \mathrm{Dom}(f) \setminus \{a\}$ pontra ha $|x - a| < \delta$, akkor $|f(x) - A| < \varepsilon$ teljesül.

162. Tekintsünk egy $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvényt és legyen a torlódási pontja $\mathrm{Dom}(f)$-nek. $\lim\limits_{x\to a} f(x) = A$, ha minden $\varepsilon > 0$ esetén létezik egy $\delta > 0$ érték, amely esetén minden $x \in \mathrm{Dom}(f) \setminus \{a\}$ pontra ha $|x - a| > \delta$, akkor $|f(x) - A| < \varepsilon$ teljesül.

163. Tekintsünk egy $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvényt és legyen a torlódási pontja $\mathrm{Dom}(f)$-nek. $\lim\limits_{x\to a} f(x) = A$, ha minden $\varepsilon > 0$ esetén létezik egy $\delta > 0$ érték, amely esetén minden $x \in \mathrm{Dom}(f) \setminus \{a\}$ pontra ha $|x - a| < \delta$, akkor $|f(x) - A| > \varepsilon$ teljesül.

164. Tekintsünk egy $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvényt és legyen a torlódási pontja $\mathrm{Dom}(f)$-nek. $\lim\limits_{x\to a} f(x) = A$, ha létezik egy $\delta > 0$ érték, hogy minden $\varepsilon > 0$ esetén minden $x \in \mathrm{Dom}(f) \setminus \{a\}$ pontra ha $|x - a| < \delta$, akkor $|f(x) - A| < \varepsilon$ teljesül.

165. Tekintsünk egy $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvényt és legyen a torlódási pontja $\mathrm{Dom}(f)$-nek. $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \infty$, ha minden $\Omega > 0$ esetén létezik egy $\delta > 0$ érték, amely esetén minden $x \in \mathrm{Dom}(f) \setminus \{a\}$ pontra ha $|x - a| < \delta$, akkor $f(x) > \Omega$ teljesül.

166. Tekintsünk egy $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvényt és legyen a torlódási pontja $\mathrm{Dom}(f)$-nek. $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \infty$, ha minden $\Omega > 0$ esetén létezik egy $\delta > 0$ érték, amely esetén minden $x \in \mathrm{Dom}(f) \setminus \{a\}$ pontra ha $|x - a| > \delta$, akkor $f(x) > \Omega$ teljesül.

167. Tekintsünk egy $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvényt és legyen a torlódási pontja $\mathrm{Dom}(f)$-nek. $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \infty$, ha minden $\Omega > 0$ esetén létezik egy $\delta > 0$ érték, amely esetén minden $x \in \mathrm{Dom}(f) \setminus \{a\}$ pontra ha $|x - a| < \delta$, akkor $f(x) < \Omega$ teljesül.

168. Tekintsünk egy $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvényt és legyen a torlódási pontja $\mathrm{Dom}(f)$-nek. $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \infty$, ha minden $\delta > 0$ esetén létezik egy $\Omega > 0$ érték, amely esetén minden $x \in \mathrm{Dom}(f) \setminus \{a\}$ pontra ha $|x - a| < \delta$, akkor $f(x) > \Omega$ teljesül.

169. Tekintsünk egy $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvényt és legyen ∞ torlódási pontja $\mathrm{Dom}(f)$-nek. $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = A$, ha minden $\varepsilon > 0$ esetén létezik egy $K > 0$ érték, amely esetén minden $x \in \mathrm{Dom}(f)$ pontra ha $x > K$, akkor $|f(x) - A| < \varepsilon$ teljesül.

170. Tekintsünk egy $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvényt és legyen ∞ torlódási pontja $\mathrm{Dom}(f)$-nek. $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = A$, ha minden $\varepsilon > 0$ esetén létezik egy $K > 0$ érték, amely esetén minden $x \in \mathrm{Dom}(f)$ pontra ha $x < K$, akkor $|f(x) - A| < \varepsilon$ teljesül.

171. Tekintsünk egy $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvényt és legyen ∞ torlódási pontja $\mathrm{Dom}(f)$-nek. $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = A$, ha minden $\varepsilon > 0$ esetén létezik egy $K > 0$ érték, amely esetén minden $x \in \mathrm{Dom}(f)$ pontra ha $x > K$, akkor $|f(x) - A| > \varepsilon$ teljesül.

172. Ha egy $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvényre $\lim\limits_{x\to a+0} f(x) = \lim\limits_{x\to a-0} f(x) = A$ $(a \in \mathbb{R})$, akkor $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ létezik és $\lim\limits_{x\to a} f(x) = A$.

173. Van olyan $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvény, amelyre $\lim\limits_{x\to a+0} f(x) = \lim\limits_{x\to a-0} f(x) = A$ $(a \in \mathbb{R})$, de $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ nem létezik.

174. Van olyan $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvény, amelyre $\lim\limits_{x\to a+0} f(x) = \lim\limits_{x\to a-0} f(x) = A$ $(a \in \mathbb{R})$, de $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ létezik, de $\lim\limits_{x\to a} f(x) \neq A$.

175. Van olyan $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvény, amelyre $\lim\limits_{x\to a+0} f(x) \neq \lim\limits_{x\to a-0} f(x)$ $(a \in \mathbb{R})$.

176. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin(x)}{x} = 1$.

177. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin(x)}{x} = 0$.

178. $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\sin(x)}{x} = 1.$

179. $\lim\limits_{x\to \infty} \dfrac{\sin(x)}{x} = 1.$

2.4 Folytonosság és tulajdonságai

180. Egy $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvény folytonos egy $a \in \mathbb{R}$ pontban, ha $\lim\limits_{x\to a} f(x) = f(a)$.

181. Egy $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvény folytonos egy $a \in \mathbb{R}$ pontban, ha $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ létezik.

182. Tekintsünk egy $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ folytonos függvényt. Ekkor léteznek olyan $\alpha, \beta \in [a, b]$ értékek, hogy $f(\alpha) = \inf\limits_{x\in[a,b]} f(x)$ és $f(\beta) = \sup\limits_{x\in[a,b]} f(x)$.

183. Tekintsünk egy $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ folytonos függvényt. Ekkor léteznek olyan $\alpha, \beta \in [a, b]$ értékek, hogy $\alpha = \inf\limits_{x\in[a,b]} f(x)$ és $\beta = \sup\limits_{x\in[a,b]} f(x)$.

184. Tekintsünk egy $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ folytonos függvényt. Ekkor ha $f(a) \cdot f(b) < 0$, akkor létezik egy olyan $c \in (a, b)$ érték, amelyre $f(c) = 0$.

185. Tekintsünk egy $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ folytonos függvényt. Ekkor ha $a \cdot b < 0$, akkor létezik egy olyan $c \in (a, b)$ érték, amelyre $f(c) = 0$.

186. Tekintsünk egy $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ folytonos függvényt. Ekkor ha $f(a) \cdot f(b) < 0$, akkor létezik egy olyan $c \in (a, b)$ érték, amelyre $f(c) = a$.

187. Tekintsünk egy $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ folytonos függvényt. Ekkor ha $f(a) \cdot f(b) < 0$, akkor létezik egy olyan $c \in (a, b)$ érték, amelyre $f(c) = b$.

188. Egy $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvénynek megszüntethető szakadása van egy $a \in \mathbb{R}$ pontban, ha $\lim\limits_{x\to a+0} f(x) = \lim\limits_{x\to a-0} f(x)$ de ezen értékek nem egyenlők $f(a)$-val.

189. Egy $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvénynek megszüntethető szakadása van egy $a \in \mathbb{R}$ pontban, ha $\lim\limits_{x\to a+0} f(x) = \lim\limits_{x\to a-0} f(x)$ de ezen értékek nem egyenlők a-val.

190. Egy $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvénynek megszüntethető szakadása van egy $a \in \mathbb{R}$ pontban, ha $\lim\limits_{x\to a+0} f(x)$ és $\lim\limits_{x\to a-0} f(x)$ léteznek, de ezen értékek nem egyenlők.

191. Egy $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvénynek ugrása van egy $a \in \mathbb{R}$ pontban, ha $\lim\limits_{x\to a+0} f(x)$ és $\lim\limits_{x\to a-0} f(x)$ léteznek, de ezen értékek nem egyenlők.

3 Függvények deriválása

3.1 Deriválás definíciója és tulajdonságai

192. Egy $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvény deriválható az $a \in \mathrm{Int}(\mathrm{Dom}(f))$ pontban, ha létezik egy olyan $A \in \mathbb{R}$ érték, amelyre $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x) - f(a)}{x - a} = A$.

193. Egy $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvény deriválható az $a \in \mathrm{Int}(\mathrm{Dom}(f))$ pontban, ha létezik egy olyan $A \in \mathbb{R}$ érték, amelyre $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x) - f(a)}{x} = A$.

194. Egy $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvény deriválható az $a \in \mathrm{Int}(\mathrm{Dom}(f))$ pontban, ha létezik egy olyan $A \in \mathbb{R}$ érték, amelyre $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x) - f(a)}{a} = A$.

195. Egy $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvény deriválható az $a \in \mathrm{Int}(\mathrm{Dom}(f))$ pontban, ha létezik egy olyan $A \in \mathbb{R}$ érték, amelyre $\lim\limits_{a \to 0} \dfrac{f(x) - f(a)}{a} = A$.

196. Egy $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvény deriválható az $a \in \mathrm{Int}(\mathrm{Dom}(f))$ pontban, ha létezik egy olyan $A \in \mathbb{R}$ érték, amelyre $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{x - a}{f(x) - f(a)} = A$.

197. Egy $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvény deriválható az $a \in \mathrm{Int}(\mathrm{Dom}(f))$ pontban, ha létezik egy olyan $A \in \mathbb{R}$ érték, amelyre $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{f(x) - f(a)}{x - a} = A$.

198. Ha egy $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvény deriválható egy $a \in \mathbb{R}$ pontban, akkor ott folytonos is.

199. Ha egy $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvény folytonos egy $a \in \mathbb{R}$ pontban, akkor ott deriválható is.

200. Egy $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvény egy adott $a \in \mathbb{R}$ pontban pontosan akkor deriválható, ha folytonos is.

201. Ha $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ deriválhatók az $a \in \mathbb{R}$ pontban, akkor $(f + g)'(a) = f'(a) + g'(a)$.

202. Ha $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ deriválhatók az $a \in \mathbb{R}$ pontban, akkor $(f + g)'(a) = f'(a)g(a) + g'(a)f(a)$.

203. Ha $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ deriválhatók az $a \in \mathbb{R}$ pontban, akkor $(f \cdot g)'(a) = f'(a)g(a) + g'(a)f(a)$.

204. Ha $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ deriválhatók az $a \in \mathbb{R}$ pontban, akkor $(f \cdot g)'(a) = f'(a) \cdot g'(a)$.

205. Ha $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ deriválhatók az $a \in \mathbb{R}$ pontban és $g(x) \neq 0$ az a pont egy környezetében, akkor $\left(\dfrac{f}{g}\right)'(a) = \dfrac{f'(a)g(a) - f(a)g'(a)}{(g(a))^2}$.

206. Ha $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ deriválhatók az $a \in \mathbb{R}$ pontban és $g(x) \neq 0$ az a pont egy környezetében, akkor $\left(\dfrac{f}{g}\right)'(a) = \dfrac{f'(a)}{g'(a)}$.

207. Ha $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ deriválhatók az $a \in \mathbb{R}$ pontban és $g(x) \neq 0$ az a pont egy környezetében, akkor $\left(\dfrac{f}{g}\right)'(a) = \dfrac{f'(a)g(a) + f(a)g'(a)}{(g(a))^2}$.

208. Ha $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ deriválhatók az $a \in \mathbb{R}$ pontban és $g(x) \neq 0$ az a pont egy környezetében, akkor $\left(\dfrac{f}{g}\right)'(a) = \dfrac{f'(a) - g'(a)}{(g(a))^2}$.

209. Ha $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ deriválhatók az $a \in \mathbb{R}$ pontban és $g(x) \neq 0$ az a pont egy környezetében, akkor $\left(\dfrac{f}{g}\right)'(a) = \dfrac{f'(a)g(a) - f(a)g'(a)}{g(a)}$.

210. Ha $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ deriválhatók az $a \in \mathbb{R}$ pontban és $g(x) \neq 0$ az a pont egy környezetében, akkor $\left(\dfrac{f}{g}\right)'(a) = \dfrac{f'(a)g(a) - f(a)g'(a)}{(g'(a))^2}$.

211. Ha $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, f deriválható az $a \in \mathbb{R}$ pontban és g deriválható az $f(a)$ pontban, akkor $(g(f(a)))' = g'(f(a)) \cdot f'(a)$.

212. Ha $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, f deriválható az $a \in \mathbb{R}$ pontban és g deriválható az $f(a)$ pontban, akkor $(g(f(a)))' = g'(f'(a))$.

213. Ha $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, f deriválható az $a \in \mathbb{R}$ pontban és g deriválható az $f(a)$ pontban, akkor $(g(f(a)))' = g'(f(a)) \cdot f(a) + g(f(a)) \cdot f'(a)$.

3.2 Deriválás alkalmazásai

214. Ha egy differenciálható $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvény grafikonjának érintője egy adott a pontban vízszintes, akkor ott a függvény deriváltja nulla.

215. Ha egy differenciálható $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvény grafikonjának érintője egy adott a pontban vízszintes, akkor ott a függvénynek nincs deriváltja.

216. Egy differenciálható $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvény $(x_0, f(x_0))$ pontjához húzott érintőjének egyenlete $y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$.

217. Egy differenciálható $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvény $(x_0, f(x_0))$ pontjához húzott érintőjének egyenlete $x - x_0 = f'(x_0)(y - f(x_0))$.

218. Ha $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvények deriválhatók az $a \in \mathbb{R}$ pont egy környezetében, $g'(a) \neq 0$ és a $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$ határérték létezik, valamint $f(a) = g(a) = 0$, akkor $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x \to a} \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$.

219. Ha $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvények deriválhatók az $a \in \mathbb{R}$ pont egy környezetében, $g'(a) \neq 0$ és a $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$ határérték létezik, valamint $f(a) = g(a) = 0$, akkor $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x \to a} \left(\dfrac{f(x)}{g(x)}\right)'$.

220. Ha $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ folytonos függvény ami differenciálható (a, b)-n, továbbá $f(a) = f(b)$, akkor van egy olyan $c \in (a, b)$, ahol $f'(c) = 0$.

221. Ha $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ folytonos függvény ami differenciálható (a, b)-n, továbbá $f(a) = f(b)$, akkor van egy olyan $c \in (a, b)$, ahol $f(c) = 0$.

222. Ha $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ folytonos függvény ami differenciálható (a, b)-n, továbbá $f(a) = f(b) = 0$, akkor van egy olyan $c \in (a, b)$, ahol $f(c) = 0$.

223. Ha $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ folytonos függvény ami differenciálható (a, b)-n, akkor van egy olyan $c \in (a, b)$, ahol $f(b) - f(a) = (b - a)f'(c)$.

224. Ha $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ folytonos függvény ami differenciálható (a, b)-n, akkor van egy olyan $c \in (a, b)$, ahol $f(b) - f(a) = (b - a)f(c)$.

225. Ha $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ folytonos függvény ami differenciálható (a, b)-n, akkor van egy olyan $c \in (a, b)$, ahol $f(b) - f(a) = f(c)$.

226. Ha $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ folytonos függvény ami differenciálható (a, b)-n, akkor van egy olyan $c \in (a, b)$, ahol $f'(c) = 0$.

227. Ha $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ folytonos függvény ami differenciálható (a, b)-n, akkor van egy olyan $c \in (a, b)$, ahol $f(b) - f(a) = f'(c)$.

3.3 Szélsőértékvizsgálat

228. Ha egy $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ deriválható függvényre $f'(x) = 0$ az (a, b) intervallumon, akkor f állandó az (a, b) intervallumon.

229. Ha egy $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ deriválható függvényre $f'(x) = 0$ az (a, b) intervallumon, akkor f azonosan nulla az (a, b) intervallumon.

230. Ha egy $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ deriválható függvényre $f'(x) \geq 0$ az (a, b) intervallumon, akkor f monoton nő az (a, b) intervallumon.

231. Ha egy $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ deriválható függvényre $f'(x) \geq 0$ az (a, b) intervallumon, akkor f monoton csökken az (a, b) intervallumon.

232. Ha egy $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ deriválható függvényre $f'(x) \geq 0$ az (a, b) intervallumon, akkor f konvex az (a, b) intervallumon.

233. Ha egy $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ deriválható függvényre $f'(x) \geq 0$ az (a, b) intervallumon, akkor f konkáv az (a, b) intervallumon.

234. Ha egy $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ deriválható függvényre $f'(x) \leq 0$ az (a, b) intervallumon, akkor f monoton csökken az (a, b) intervallumon.

235. Ha egy $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ deriválható függvényre $f'(x) \leq 0$ az (a, b) intervallumon, akkor f monoton nő az (a, b) intervallumon.

236. Ha egy $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ deriválható függvényre $f'(x) \geq 0$ az (a, b) intervallumon, akkor f konvex az (a, b) intervallumon.

237. Ha egy $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ deriválható függvényre $f'(x) \geq 0$ az (a, b) intervallumon, akkor f konkáv az (a, b) intervallumon.

238. Ha egy $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ kétszer deriválható függvényre $f''(x) \geq 0$ az (a, b) intervallumon, akkor f konvex az (a, b) intervallumon.

239. Ha egy $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ kétszer deriválható függvényre $f''(x) \geq 0$ az (a, b) intervallumon, akkor f konkáv az (a, b) intervallumon.

240. Ha egy $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ kétszer deriválható függvényre $f''(x) \leq 0$ az (a, b) intervallumon, akkor f konvex az (a, b) intervallumon.

241. Ha egy $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ kétszer deriválható függvényre $f''(x) \leq 0$ az (a, b) intervallumon, akkor f konkáv az (a, b) intervallumon.

242. Ha egy $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ deriválható függvényre $f'(c) = 0$ egy $c \in (a, b)$ pontban, akkor f-nek ott szélsőértéke van.

243. Ha egy $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ deriválható függvénynek egy $c \in (a, b)$ pontban szélsőértéke van, akkor $f'(c) = 0$ teljesül.

244. Ha egy $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ kétszer deriválható függvényre $f'(c) = 0$ és $f'' \neq 0$ egy $c \in (a, b)$ pontban, akkor f-nek ott szélsőértéke van.

245. Ha egy $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ kétszer deriválható függvényre $f'(c) = 0$ és $f'' = 0$ egy $c \in (a, b)$ pontban, akkor f-nek ott szélsőértéke van.

246. Ha egy $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ kétszer deriválható függvényre $f'(c) = 0$ és $f'' = 0$ egy $c \in (a, b)$ pontban, akkor f-nek ott inflexiós pontja van.

3.4 Deriválás további alkalmazásai

247. Egy $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, négyszer deriválható függvény $x_0 = 1$ körüli, harmadfokú Taylor polinomjának alakja az $x = b$ pontban $f(1) + f'(1)(b-1) + \frac{f''(1)}{2}(b-1)^2 + \frac{f'''(1)}{3!}(b-1)^3$.

248. Egy $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, négyszer deriválható függvény $x_0 = 1$ körüli, harmadfokú Taylor polinomjának alakja az $x = b$ pontban $f(1) + f'(1)(b-1) + \frac{f''(1)}{2}(b-1)^2 + \frac{f'''(1)}{3}(b-1)^3$.

249. Egy $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, négyszer deriválható függvény $x_0 = 1$ körüli, harmadfokú Taylor polinomjának alakja az $x = b$ pontban $f(1) + f'(1)(b-1) + \frac{f''(1)}{2}(b-1) + \frac{f'''(1)}{3!}(b-1)$.

250. Egy $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, négyszer deriválható függvény $x_0 = 1$ körüli, harmadfokú Taylor polinomjának alakja az $x = b$ pontban $f(1) + f(1)(b-1) + \frac{f(1)}{2}(b-1)^2 + \frac{f(1)}{3!}(b-1)^3$.

251. Egy $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, négyszer deriválható függvény $x_0 = 1$ körüli, harmadfokú Taylor polinomjának alakja az $x = b$ pontban $f(b) + f'(b)(b-1) + \frac{f''(b)}{2}(b-1)^2 + \frac{f'''(b)}{3!}(b-1)^3$.

252. Egy $x = x(t)$, $y = y(t)$ ($t \in [t_1, t_2]$) alakban adott paraméteres görbe deriváltja a t_0 pontban az $\dfrac{y'(t_0)}{x'(t_0)}$ képlettel számolható.

253. Egy $x = x(t)$, $y = y(t)$ ($t \in [t_1, t_2]$) alakban adott paraméteres görbe deriváltja a t_0 pontban az $\dfrac{x'(t_0)}{y'(t_0)}$ képlettel számolható.

254. Egy $x = x(t)$, $y = y(t)$ ($t \in [t_1, t_2]$) alakban adott paraméteres görbe deriváltja a t_0 pontban az $\dfrac{y(t_0)}{x(t_0)}$ képlettel számolható.

255. Egy $x = x(t)$, $y = y(t)$ ($t \in [t_1, t_2]$) alakban adott paraméteres görbe deriváltja a t_0 pontban az $\left(\dfrac{y(t_0)}{x(t_0)}\right)'$ képlettel számolható.

4 Függvények integrálása

4.1 Határozatlan integrálás

256. Egy $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvénynek $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ primitív függvénye, ha $F' = f$.

257. Egy $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvény az $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvény primitív függvénye, ha $F' = f$.

258. Egy $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvénynek csak egy primitív függvénye lehet.

259. Van olyan $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvény, amelynek csak egy primitív függvénye van.

260. Egy $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvénynek végtelen sok primitív függvénye lehet.

261. Ha egy $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvénynek van egy F primitív függvénye, akkor végtelen sok primitív függvénye van, és ezek $F + c$ alakban állnak elő (ahol $c \in \mathbb{R}$ tetszőleges).

262. Ha egy $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvénynek van egy F primitív függvénye, akkor végtelen sok primitív függvénye van, és ezek $c \cdot F$ alakban állnak elő (ahol $c \in \mathbb{R}$ tetszőleges).

263. Ha $u, v : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvények deriválhatók, továbbá $u' \cdot v$-nek és $u \cdot v'$-nek létezik primitív függvénye. Ekkor $\displaystyle\int u'(x) \cdot v(x)dx = u(x) \cdot v(x) - \int u(x) \cdot v'(x)dx$.

264. Ha $u, v : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvények deriválhatók, továbbá $u' \cdot v$-nek és $u \cdot v'$-nek létezik primitív függvénye. Ekkor $\displaystyle\int u'(x) \cdot v(x)dx = u(x) \cdot v(x) + \int u(x) \cdot v'(x)dx$.

265. Ha $u, v : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvények deriválhatók, továbbá $u' \cdot v'$-nek és $u \cdot v$-nek létezik primitív függvénye. Ekkor $\displaystyle\int u'(x) \cdot v'(x)dx = u(x) \cdot v(x) - \int u(x) \cdot v(x)dx$.

266. Ha $u, v : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvények deriválhatók, továbbá $u \cdot v$-nek létezik primitív függvénye. Ekkor $\displaystyle\int u(x) \cdot v(x)dx = u(x) \cdot v(x) - \int u(x) \cdot v(x)dx$.

267. Egy $\dfrac{1}{(x-2)(x-3)}$ kifejezés parciális törtekre bontását $\dfrac{A}{x-2} + \dfrac{B}{x-3}$ alakban kereshetjük ($A, B \in \mathbb{R}$).

268. Egy $\dfrac{1}{(x-2)(x-3)}$ kifejezés parciális törtekre bontását $\dfrac{Ax}{x-2} + \dfrac{Bx}{x-3}$ alakban kereshetjük ($A, B \in \mathbb{R}$).

269. Egy $\dfrac{1}{(x-2)(x-3)}$ kifejezés parciális törtekre bontását $\dfrac{A}{x-2} \cdot \dfrac{B}{x-3}$ alakban kereshetjük ($A, B \in \mathbb{R}$).

270. Egy $\dfrac{1}{x(x^2+1)}$ kifejezés parciális törtekre bontását $\dfrac{A}{x} + \dfrac{Bx+C}{x^2+1}$ alakban kereshetjük $(A, B \in \mathbb{R})$.

271. Egy $\dfrac{1}{x(x^2+1)}$ kifejezés parciális törtekre bontását $\dfrac{A}{x} + \dfrac{B}{x^2+1}$ alakban kereshetjük $(A, B \in \mathbb{R})$.

272. Egy $\dfrac{1}{x(x^2+1)}$ kifejezés parciális törtekre bontását $\dfrac{A}{x} + \dfrac{Bx}{x^2+1}$ alakban kereshetjük $(A, B \in \mathbb{R})$.

4.2 Határozott integrálás

273. Egy $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ korlátos függvény felső Riemann összege mindig nagyobb (vagy egyenlő) mint az integrál $\displaystyle\int_a^b f(x)dx$.

274. Egy $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ korlátos függvény felső Riemann összege mindig kisebb (vagy egyenlő) mint az integrál $\displaystyle\int_a^b f(x)dx$.

275. Egy $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ korlátos függvény alsó Riemann összege mindig nagyobb (vagy egyenlő) mint az integrál $\displaystyle\int_a^b f(x)dx$.

276. Egy $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ korlátos függvény alsó Riemann összege mindig kisebb (vagy egyenlő) mint az integrál $\displaystyle\int_a^b f(x)dx$.

277. Ha egy $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ függvény monoton, akkor Riemann integrálható.

278. Ha egy $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ függvény Riemann-integrálható, akkor monoton.

279. Egy $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ függvény pontosan akkor Riemann-integrálható, ha monoton.

280. Ha egy $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ függvény folytonos, akkor Riemann integrálható.

281. Ha egy $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ függvény Riemann integrálható, akkor folytonos.

282. Egy $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ függvény pontosan akkor Riemann-integrálható, ha folytonos.

283. Legyen $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ függvény Riemann integrálható, $F : [a, b] \to \mathbb{R}$ folytonos és $F' = f$ az (a, b) intervallumon. Ekkor $\displaystyle\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$.

284. Legyen $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ függvény Riemann integrálható, $F : [a, b] \to \mathbb{R}$ folytonos és $F' = f$ az (a, b) intervallumon. Ekkor $\displaystyle\int_a^b f(x)dx = F(b) + F(a)$.

285. Legyen $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ függvény Riemann integrálható, $F : [a, b] \to \mathbb{R}$ folytonos és $F = f'$ az (a, b) intervallumon. Ekkor $\displaystyle\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$.

286. Legyen $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ függvény Riemann integrálható, $F : [a, b] \to \mathbb{R}$ folytonos és $F' = f$ az (a, b) intervallumon. Ekkor $\displaystyle\int_a^b f'(x)dx = F(b) - F(a)$.

287. Legyen $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ függvény Riemann integrálható, $F : [a, b] \to \mathbb{R}$ folytonos és $F' = f$ az (a, b) intervallumon. Ekkor $\displaystyle\int_a^b f(x)dx = F'(b) - F'(a)$.

288. Legyen $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ függvény Riemann integrálható, $F : [a, b] \to \mathbb{R}$ folytonos és $F' = f$ az (a, b) intervallumon. Ekkor $\int_a^b f(x)dx = F(a) - F(b)$.

289. Egy $f : [a, b] : \mathbb{R}$, $[a, b]$-n Riemann-integrálható függvény integrálfüggvénye $I_f(x) = \int_a^x f(s)ds$.

290. Egy $f : [a, b] : \mathbb{R}$, $[a, b]$-n Riemann-integrálható függvény integrálfüggvénye $I_f(x) = \int_a^b f(x)dx$.

291. Egy $f : [a, b] : \mathbb{R}$, $[a, b]$-n Riemann-integrálható függvény integrálfüggvénye $I_f(x) = \int_a^x f'(s)ds$.

292. Egy $f : [a, b] : \mathbb{R}$, $[a, b]$-n Riemann-integrálható függvény integrálfüggvénye $I_f(x) = \int_x^b f(s)ds$.

293. Egy $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ Riemann-integrálható függvény integrálfüggvénye mindig folytonos.

294. Van olyan $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ Riemann-integrálható függvény, melynek integrálfüggvénye nem folytonos.

295. Ha egy $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ Riemann-integrálható függvény integrálfüggvénye folytonos, akkor f is folytonos.

296. Egy Riemann-integrálható $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ pozitív függvény esetén a $\int_a^b f(x)dx$ integrál megadja a függvény görbéje és az x tengely közé eső térrész területét.

297. Egy Riemann-integrálható $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ függvény esetén a $\int_a^b f(x)dx$ integrál megadja a függvény görbéje és az x tengely közé eső térrész területét.

298. Egy Riemann-integrálható $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ pozitív függvény esetén a $\int_a^b f(x)dx$ integrál megadja a függvény görbéje és az y tengely közé eső térrész területét.

5 Komplex számok

299. $z_1 = a + bi$ és $z_2 = c + di$ komplex számok szorzata $ac - bd + i(ad + bc)$.

300. $z_1 = a + bi$ és $z_2 = c + di$ komplex számok szorzata $ac + idb$.

301. $z_1 = a + bi$ és $z_2 = c + di$ komplex számok szorzata $ac + bd + i(ad - bc)$.

302. $z = 3 - 2i$ komplex szám valós része 3.

303. $z = 3 - 2i$ komplex szám valós részei 3 és 2.

304. $z = 3 - 2i$ komplex szám valós részei 3 és -2.

305. $z = 3 - 2i$ komplex szám képzetes része -2.

306. $z = 3 - 2i$ komplex szám képzetes része $-2i$.

307. $z = 3 - 2i$ komplex szám képzetes része 2.

308. $z = i - 1$ komplex szám konjugáltja $-i - 1$.

309. $z = i - 1$ komplex szám konjugáltja $i + 1$.

310. $z = i - 1$ komplex szám konjugáltja $-i + 1$.

311. $z = i + 1$ komplex szám abszolút értéke $\sqrt{2}$.

312. $z = i + 1$ komplex szám abszolút értéke 0.

313. $z = i + 1$ komplex szám abszolút értéke 1.

314. $z_1 = r_1(\cos(\varphi_1) + i\sin(\varphi_1))$ és $z_2 = r_2(\cos(\varphi_2) + i\sin(\varphi_2))$ komplex számok szorzata $z_1 \cdot z_2 = r_1 r_2(\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 + \varphi_2))$.

315. $z_1 = r_1(\cos(\varphi_1) + i\sin(\varphi_1))$ és $z_2 = r_2(\cos(\varphi_2) + i\sin(\varphi_2))$ komplex számok összege $z_1 + z_2 = (r_1 + r_2)(\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 + \varphi_2))$.

316. $z_1 = r_1(\cos(\varphi_1) + i\sin(\varphi_1))$ és $z_2 = r_2(\cos(\varphi_2) + i\sin(\varphi_2))$ komplex számok szorzata $z_1 \cdot z_2 = r_1 r_2(\cos(\varphi_1 \cdot \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 \cdot \varphi_2))$.

317. $z_1 = r_1(\cos(\varphi_1) + i\sin(\varphi_1))$ és $z_2 = r_2(\cos(\varphi_2) + i\sin(\varphi_2))$ komplex számok hányadosa $z_1/z_2 = (r_1/r_2)(\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 - \varphi_2))$.

318. $z_1 = r_1(\cos(\varphi_1) + i\sin(\varphi_1))$ és $z_2 = r_2(\cos(\varphi_2) + i\sin(\varphi_2))$ komplex számok különbsége $z_1 - z_2 = (r_1 - r_2)(\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 - \varphi_2))$.

319. $z_1 = r_1(\cos(\varphi_1) + i\sin(\varphi_1))$ és $z_2 = r_2(\cos(\varphi_2) + i\sin(\varphi_2))$ komplex számok hányadosa $z_1/z_2 = (r_1/r_2)(\cos(\varphi_1/\varphi_2) + i\sin(\varphi_1/\varphi_2))$.

320. $z = r(\cos(\varphi) + i\sin(\varphi))$ komplex szám n-edik ($n \in \mathbb{N}$) hatványa $z^n = r^n(\cos(n\varphi) + i\sin(\varphi n))$.

321. $z = r(\cos(\varphi) + i\sin(\varphi))$ komplex szám n-edik ($n \in \mathbb{N}$) hatványa $z^n = nr(\cos(n\varphi) + i\sin(\varphi n))$.

322. $z = r(\cos(\varphi) + i\sin(\varphi))$ komplex szám n-edik ($n \in \mathbb{N}$) hatványa $z^n = r^n(\cos(\varphi^n) + i\sin(\varphi^n))$.

323. Minden $z \neq 0$ komplex számnak n darab, páronként különböző komplex gyöke van.

324. Minden $z \neq 0$ komplex számnak van komplex gyöke.

325. Van olyan $z \neq 0$ komplex szám, aminek kevesebb, mint n darab komplex gyöke van.

326. Van olyan $z \neq 0$ komplex szám, aminek nincs komplex gyöke.

327. Minden komplex együtthatós, legalább elsőfokú polinomnak van legalább egy komplex gyöke.

328. Van olyan komplex együtthatós, legalább elsőfokú polinom, aminek nincs komplex gyöke.

329. Minden komplex együtthatós, legalább elsőfokú polinomnak van legalább egy valós gyöke.

330. Minden valós együtthatós, legalább elsőfokú polinomnak van legalább egy valós gyöke.

331. Ha egy valós együtthatós polinomnak egy z komplex szám gyöke, akkor a szám $\overline{z}$ konjugáltja is gyöke a polinomnak.

332. Van olyan valós együtthatós polinom, melynek egy z komplex szám gyöke, de $\overline{z}$ (a szám konjugáltja) nem gyöke a polinomnak.

333. Minden legalább elsőfokú valós együtthatós polinom előáll, mint valós elsőfokú polinomok szorzata.

334. Minden legalább elsőfokú valós együtthatós polinom előáll, mint valós együtthatós elsőfokú, illetve negatív diszkriminánsú valós együtthatós másodfokú polinomok szorzata.

335. Minden legalább elsőfokú valós együtthatós polinom előáll, mint komplex együtthatós elsőfokú polinomok szorzata.