Feltételes szélsőérték számítása

Matematika G szigorlat segédlet

Elmélet

Egy adott $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ függvény szélsőértékeit (minimumát és maximumát) keressük egy

$$g(x, y) \leq b$$

egyenlet által megadott halmazon.
Weierstrass tétele: Egy $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ folytonos függvénynek egy korlátos és zárt halmazon van maximuma és minimuma is.
A szélsőértékek két helyen lehetnek:

1. Vagy a tartomány belsejében vannak, ekkor a feltétel nélküli szélsőérték-keresés módszerét használhatjuk. Ez azt jelenti, hogy megvizsgáljuk, hol lesznek az f függvény deriváltjai nullák, és ezen pontokban kiszámítjuk a Hesse mátrixot:

$$H = \begin{pmatrix} f''_{xx} & f''_{yx} \\ f''_{xy} & f''_{yy} \end{pmatrix}.$$

   Ekkor négy eset fordulhat elő:

   - Ha ez a mátrix pozitív definit (azaz mindkét sajátértéke pozitív, vagy másként $\det(H) > 0$ és $f''_{xx} > 0$ és teljesül), akkor itt a függvénynek minimuma van.
   - Ha ez a mátrix negatív definit (azaz a sajátértékek negatívok, vagy másként $\det(H) > 0$ és $f''_{xx} < 0$ és teljesül), akkor itt a függvénynek maximuma van.
   - Ha a mátrix indefinit, azaz $\det(H) < 0$ vagy másként a két sajátérték nem nulla de különböző előjelű, akkor itt a függvénynek nincs szélsőértéke (nyeregpontja van).
   - Ha $\det(H) = 0$ vagy másként valamelyik sajátérték nulla, akkor nem tudjuk, további vizsgálat szükséges (ilyen nem lesz a szigorlaton).

2. A szélsőértékek lehetnek a tartomány határán is. Ekkor a Lagrange-féle multiplikátorok módszerét használjuk. Ehhez definiáljuk az alábbi, Lagrange-függvényt:

$$L(x, y) = f(x, y) - \lambda(g(x) - b),$$

   ahol $\lambda \in \mathbb{R}$ az ún. Lagrange-multiplikátor. Ekkor ott lehet a határon szélsőérték, ahol ezen L függvény deriváltjai nullák. Ezen pontokban ezeket követően kiszámítjuk f értékeit, és ahol a legkisebb az érték, ott lesz minimuma, míg ahol legnagyobb, ott lesz maximum.

A két módszerrel kapott szélsőértékeket végül összehasonlítjuk, és a nagyobbik maximum lesz a globális maximum, míg a legkisebb a globális minimum.

1. Keressük az alábbi függvény szélsőértékeit az $x^2 + y^2 \leq 1$ egyenletű körlapon.

$$f(x, y) = 2x^2 - 2xy + 2y^2$$

   Megoldás:

   - **A kör belsejében:**

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 4x - 2y = 0,$$
$$\frac{\partial f}{\partial y} = -2x + 4y = 0,$$

Az első egyenletből $2x = y$, és a másodikból $x = y = 0$ ($P_1(x, y) = (0{,}0)$).
A Hesse mátrix alakja

$$\begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -2 & 4 \end{pmatrix},$$

ahol a determináns $20 > 0$ és a bal felső elem $4 > 0$, így ez egy lokális minimum. Itt a függvény értéke $f(0{,}0) = 0$.

– **A határon:**

$$L(x, y) = 2x^2 - 2xy + 2y^2 - \lambda(x^2 + y^2 - 1),$$

$$\frac{\partial L}{\partial x} = 4x - 2y - 2\lambda x = (4 - 2\lambda)x - 2y = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial y} = -2x + 4y - 2\lambda y = -2x + (4 - 2\lambda)y = 0$$

Az első egyenletből $y = (2 - \lambda)x$, és a másodikból $x = (2 - \lambda)y$, ami azt jelenti, hogy $y = (2 - \lambda)^2 y$, tehát $y = 0$ vagy $(2 - \lambda)^2 = 1$. Ha $y = 0$: $x = 0$ de ez nincs a határon, így ez nem érdekes. $(2 - \lambda)^2 = 1$ megoldásai $\lambda = 1$ és $\lambda = 3$.

- Ha $\lambda = 1$: $x = y$, így tehát mivel $x^2 + y^2 = 1$ ezért $x = y = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}$. A két pont ekkor $P_2 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ és $P_3 = \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$. A függvényértékek ezeken a helyeken $f(P_2) = 1$ és $f(P_3) = 1$. (1p)
- Ha $\lambda = 3$: $x = -y$, így tehát mivel $x^2 + y^2 = 1$ ezért $x = -y = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}$. A két pont ekkor $P_4 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ és $P_5 = \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$. A függvényértékek ezeken a helyeken $f(P_4) = 3$ és $f(P_5) = 3$. (1p)

Összefoglava, a miniumum (0,0)-ban van, a két maximum pedig az $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ és $\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ pontokban.

2. Keressük az alábbi függvény szélsőértékeit az $x^2 + y^2 \leq 4$ egyenletű körlapon.

$$f(x, y) = 3x^2 - 2xy + 3y^2$$

Megoldás:

– **A kör belsejében:**

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 6x - 2y = 0,$$
$$\frac{\partial f}{\partial y} = -2x + 6y = 0,$$

Az első egyenletből $3x = y$, a második egyenletből pedig $x = y = 0$ ($P_1(x, y) = (0{,}0)$). (1p)
A Hesse mátrix

$$\begin{pmatrix} 6 & -2 \\ -2 & 6 \end{pmatrix},$$

amelynek determinánsa $40 > 0$ és a bal felső elem pedig $6 > 0$, így ez egy lokális minimum. A függvényérték itt $f(0{,}0) = 0$.

– **A határon:**

$$L(x, y) = 3x^2 - 2xy + 3y^2 - \lambda(x^2 + y^2 - 4),$$

$$\frac{\partial L}{\partial x} = 6x - 2y - 2\lambda x = (6 - 2\lambda)x - 2y = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial y} = -2x + 6y - 2\lambda y = -2x + (6 - 2\lambda)y = 0$$

Az első egyenletből $y = (3 - \lambda)x$, a másodikból pedig $x = (3 - \lambda)y$, így tehát $y = (3 - - \lambda)^2 y$, azaz vagy $y = 0$, vagy $(3 - \lambda)^2 = 1$ teljesül. Ha $y = 0$, akkor $x = 0$ de ez nincs a határon így most nem érdekes. A $(3 - \lambda)^2 = 1$ egyenlet két megoldása $\lambda = 2$ és $\lambda = 4$.

- Ha $\lambda = 2$: ekkor $x = y$, azaz így $x^2 + y^2 = 4$ miatt $x = y = \pm\sqrt{2}$. A két kapott pont $P_2 = \left(\sqrt{2}, \sqrt{2}\right)$ és $P_3 = \left(-\sqrt{2}, -\sqrt{2}\right)$. Itt a függvényértékek $f(P_2) = 8$ és $f(P_3) = 8$. (1p)
- Ha $\lambda = 4$: ekkor $x = -y$, azaz így $x^2 + y^2 = 1$ miatt $x = -y = \pm\sqrt{2}$. A két kapott pont $P_4 = \left(\sqrt{2}, -\sqrt{2}\right)$ és $P_5 = \left(-\sqrt{2}, \sqrt{2}\right)$. Itt a függvényértékek $f(P_4) = 16$ és $f(P_5) = 16$. (1p)

Összefoglalva, a minimum a (0,0) pontban van, míg a két maximum pedig a $\left(\sqrt{2}, -\sqrt{2}\right)$ és $\left(-\sqrt{2}, \sqrt{2}\right)$ pontokban.

3. Keressük az alábbi függvény szélsőértékeit az $x^2 + y^2 \leq 9$ egyenletű körlapon.

$$f(x, y) = 6x^2 - 2xy + 6y^2$$

Megoldás:

- **A kör belsejében:**

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 12x - 2y = 0,$$
$$\frac{\partial f}{\partial y} = -2x + 12y = 0,$$

Az első egyenletből $3x = y$, így a másodikból pedig $x = y = 0$ $(P_1(x, y) = (0{,}0))$.
A Hesse-mátrix

$$\begin{pmatrix} 12 & -2 \\ -2 & 12 \end{pmatrix},$$

aminek determinánsa $148 > 0$ a bal felső elem pedig $12 > 0$, így ez egy lokális minimum. A függvényérték itt $f(0{,}0) = 0$.

- **A határon:**

$$L(x, y) = 6x^2 - 2xy + 6y^2 - \lambda(x^2 + y^2 - 9),$$

$$\frac{\partial L}{\partial x} = 12x - 2y - 2\lambda x = (12 - 2\lambda)x - 2y = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial y} = -2x + 12y - 2\lambda y = -2x + (12 - 2\lambda)y = 0$$

Az első egyenletből $y = (6 - \lambda)x$, a másodikból pedig $x = (6 - \lambda)y$, ami alapján $y = (6 - \lambda)^2 y$, így vagy $y = 0$, vagy $(6 - \lambda)^2 = 1$ teljesül. Ha $y = 0$, akkor $x = 0$ de ez nincs a határon, így ez a pont nem érdekes. A $(6 - \lambda)^2 = 1$ egyenlet megoldásai $\lambda = 5$ és $\lambda = 7$.

  - Ha $\lambda = 5$: $x = y$, így ekkor $x^2 + y^2 = 9$ miatt $x = y = \pm\sqrt{\frac{9}{2}}$. A két kapott pont így $P_2 = \left(\sqrt{\frac{9}{2}}, \sqrt{\frac{9}{2}}\right)$ és $P_3 = \left(-\sqrt{\frac{9}{2}}, -\sqrt{\frac{9}{2}}\right)$. A függvényértékek ezekben $f(P_2) = 45$ és $f(P_3) = 45$. (1p)
  - Ha $\lambda = 7$: $x = -y$, így ekkor $x^2 + y^2 = 9$ miatt $x = -y = \pm\sqrt{\frac{9}{2}}$. A két kapott pont így $P_4 = \left(\sqrt{\frac{9}{2}}, -\sqrt{\frac{9}{2}}\right)$ és $P_5 = \left(-\sqrt{\frac{9}{2}}, \sqrt{\frac{9}{2}}\right)$. A függvényértékek ezekben $f(P_4) = 63$ és $f(P_5) = 63$. (1p)

Összefoglalva, a minimum a (0,0) pontban van, míg a két maximum pedig a $\left(\sqrt{\frac{9}{2}}, -\sqrt{\frac{9}{2}}\right)$ és $\left(-\sqrt{\frac{9}{2}}, \sqrt{\frac{9}{2}}\right)$ pontokban.

4. Keressük az alábbi függvény szélsőértékeit az $x^2 + y^2 \leq 1$ egyenletű körlapon.

$$f(x, y) = 4x^2 - 2xy + 4y^2$$

Megoldás:

– **A kör belsejében:**

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 8x - 2y = 0,$$
$$\frac{\partial f}{\partial y} = -2x + 8y = 0,$$

Az első egyenletből $4x = y$, míg a másodikból $x = y = 0$ ($P_1(x, y) = (0{,}0)$).
A Hesse mátrix

$$\begin{pmatrix} 8 & -2 \\ -2 & 8 \end{pmatrix},$$

aminek determinánsa $68 > 0$ és bal felső eleme $8 > 0$, így ez egy lokális minimum. A függvény értéke itt $f(0{,}0) = 0$.

– **A határon:**

$$L(x, y) = 4x^2 - 2xy + 4y^2 - \lambda(x^2 + y^2 - 1),$$

$$\frac{\partial L}{\partial x} = 8x - 2y - 2\lambda x = (8 - 2\lambda)x - 2y = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial y} = -2x + 8y - 2\lambda y = -2x + (8 - 2\lambda)y = 0$$

Az első egyenletből $y = (4-\lambda)x$, a másodikból pedig $x = (4-\lambda)y$, amiből $y = (4-\lambda)^2 y$, így tehát vagy $y = 0$, vagy $(4 - \lambda)^2 = 1$ teljesül. Ha $y = 0$, akkor $x = 0$ de ez a pont nincs a határon így most nem érdekes. A $(4 - \lambda)^2 = 1$ egyenlet megoldásai $\lambda = 3$ és $\lambda = 5$.

- Ha $\lambda = 3$, akkor $x = y$, azaz az $x^2+y^2 = 1$ egyenletből $x = y = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}$. A két kapott pont $P_2 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ és $P_3 = \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$.A függvényértékek ezen pontokban $f(P_2) = 3$ és $f(P_3) = 3$. (1p)
- Ha $\lambda = 5$, akkor $x = -y$, azaz az $x^2 + y^2 = 1$ egyenletből $x = -y = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}$. A két kapott pont $P_4 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ és $P_5 = \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$. A függvényértékek ezen pontokban $f(P_4) = 5$ és $f(P_5) = 5$. (1p)

Összefoglalva, a minimum a $(0{,}0)$ pontban van, míg a két maximum pedig a $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ és $\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ pontokban.

5. Keressük az alábbi függvény szélsőértékeit az $(x - 1)^2 + y^2 \leq 1$ egyenletű körlapon.

$$f(x, y) = x^2 - y^2 + 3x - 1$$

Megoldás:

– **A kör belsejében:**

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2x + 3 = 0,$$
$$\frac{\partial f}{\partial y} = -2y = 0,$$

amiből $x = -3/2$ és $y = 0$ adódik. Ez viszont nincs a körben (hiszen jelen esetben a kör sugara egy, a középpontja pedig az $(1{,}0)$ pontban van), így nem érdemes tovább vizsgálnunk.

– **A határon:**

$$L(x, y) = x^2 - y^2 + 3x - 1 - \lambda((x - 1)^2 + y^2 - 1),$$
$$\frac{\partial L}{\partial x} = 2x + 3 - 2\lambda x + 2\lambda = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial y} = -2y - 2\lambda y = 0$$

A második egyenletből $-2y(1 + \lambda) = 0$ adódik, azaz vagy $y = 0$, vagy $\lambda = -1$.

- Ha $y = 0$, akkor a kör egyenletéből $(x-1)^2 = 1$, azaz $x = 0$ és $x = 2$. Ha $x = 0$, akkor a $\dfrac{\partial L}{\partial x}$-es egyenletből $\lambda = -3/2$. Ha $x = 2$, akkor pedig ugyanebből $\lambda = 7/2$ adódik. Ezen kettő, $P_1(0.0)$ és $P_2(2{,}0)$ pontokban a függvény értékei $f(0{,}0) = -1$ és $f(2{,}0) = 9$.
- Ha $\lambda = -1$, akkor az első egyenletből $x = -1/4$. Ez nem lesz benne a körben, bármennyi is y, így ezt nem érdemes tovább vizsgálnunk.

Ezek alapján a függvény maximuma a $P_2(2{,}0)$ pontban, míg minimuma a $P_1(0{,}0)$ pontban van.

6. Keressük az alábbi függvény szélsőértékeit az $x^2 + (y+2)^2 \leq 1$ egyenletű körlapon.

$$f(x, y) = -x^2 + 2y^2 + 3y + 5$$

Megoldás:

- **A kör belsejében:**

$$\frac{\partial f}{\partial x} = -2x = 0,$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 4y + 3 = 0,$$

amiből $x = -3/2$ és $y = 0$. Mivel jelenleg a kör középpontja $(0, -2)$ és sugara egy, így ez a pont nem lesz benne, így nem érdemes tovább vizsgálni.

- **A határon:**

$$L(x, y) = -x^2 + 2y^2 + 3y + 5 - \lambda(x^2 + (y+2)^2 - 1),$$

$$\frac{\partial L}{\partial x} = -2x - 2\lambda x = 0,$$

$$\frac{\partial L}{\partial y} = 4y + 3 - 2\lambda y - 4\lambda = 0.$$

Az első egyenletből $x = 0$ vagy $\lambda = -1$.

- Ha $x = 0$, akkor a kör egyenletéből $y_1 = -1$ vagy $y_2 = -3$, a hozzájuk tartozó multiplikátorok $\lambda_1 = -1/2$ és $\lambda_2 = 9/2$. Így a kapott pontok $P_1(0, -1)$ és $P_2(0, -3)$, itt a függvény értékei pedig $f(0, -1) = 4$ és $f(0, -3) = 14$.
- Ha $\lambda = -1$, akkor a második egyenletből $y = -7/6$. A kör egyenletéből $x_1 = -\dfrac{\sqrt{11}}{6}$ és $x_2 = \dfrac{\sqrt{11}}{6}$, a függvény értékei pedig ezekben a pontokban $f\left(-\dfrac{\sqrt{11}}{6}, -\dfrac{7}{6}\right) = \dfrac{47}{12}$ és $f\left(\dfrac{\sqrt{11}}{6}, -\dfrac{7}{6}\right) = \dfrac{47}{12}$

Összefoglalva a függvénynek maximuma van a $(0, -3)$ pontban, és minimumai a $\left(-\dfrac{\sqrt{11}}{6}, -\dfrac{7}{6}\right)$ és $\left(\dfrac{\sqrt{11}}{6}, -\dfrac{7}{6}\right)$ pontokban.