Fourier sorok

Matematika G szigorlat segédlet

Elmélet

Egy P ($P > 0$) periódusú $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvény **Fourier sorát** az alábbi képlet adja meg:

$$(\mathcal{F}f)(x) = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos\left(\frac{2\pi k}{P}x\right) + b_k \sin\left(\frac{2\pi k}{P}x\right),$$

ahol

$$a_0 = \frac{1}{P}\int_0^P f(x)dx,$$

$$a_k = \frac{2}{P}\int_0^P f(x)\cos\left(\frac{2\pi k}{P}x\right)dx,$$

$$b_k = \frac{2}{P}\int_0^P f(x)\sin\left(\frac{2\pi k}{P}x\right)dx.$$

Ha egy f függvény páros (azaz grafikonja tengelyesen szimmetrikus az y tengelyre, vagy másként $f(x) = -f(x)$ minden $x \in \mathrm{Dom}(f)$-re), akkor $b_k = 0$. Ekkor a függvény Fourier sorában csak koszinuszos tagok vannak, és ekkor **tisztán koszinuszos Fourier sorról** beszélhetünk.
Ha egy függvény páratlan (azaz grafikonja középpontosan szimmetrikus az origóra, vagy másként $f(x) = -f(-x)$ minden $x \in \mathrm{Dom}(f)$-re), akkor $a_k = 0$. Ekkor a függvény Fourier sorában csak szinuszos tagok vannak, és ekkor **tisztán szinuszos Fourier sorról** beszélhetünk.
Ha egy függvény egy adott $[0, a]$ intervallumon van értelmezve, akkor periodikussá tehetjük olyan módon, hogy a függvény grafikonját "lemásoljuk" egymás mellé végtelen sokszor. Ezt egyszerűen az $f(x) = f(x + a)$ szabállyal tehetjük meg.
Ha egy függvény egy adott $[0, a]$ intervallumon van értelmezve, és szeretnénk belőle tisztán koszinuszos Fourier sort kapni, akkor a függvény grafikonját tengelyesen tükrözzük az y tengelyre (így megkapva a grafikont a $[-a,0]$ intervallumon), majd az így kapott, $[-a, a]$ intervallumon lévő képet tükrözzük végtelen sokszor az $f(x) = f(x+2a)$ szabály segítségével (hiszen ekkor a másolandó grafikon hossza $2a$). Lásd az 1. ábrát!
Ha egy függvény egy adott $[0, a]$ intervallumon van értelmezve, és szeretnénk belőle tisztán szinuszos Fourier sort kapni, akkor a függvény grafikonját középpontosan tükrözzük az origóra (így megkapva a grafikont a $[-a,0]$ intervallumon), majd az így kapott, $[-a, a]$ intervallumon lévő képet tükrözzük végtelen sokszor az $f(x) = f(x + 2a)$ szabály segítségével (hiszen ekkor a másolandó grafikon hossza $2a$). Lásd a 2. ábrát!

1. Tekintsük azt az $f : [0, \pi] \to \mathbb{R}$ függvényt, mely $f(x) = -1$ módon van definiálva. Terjesszük ki ezt a függvényt úgy, hogy minden $x \in \mathbb{R}$ esetén értelmezve legyen, és Fourier sora tisztán koszinuszos legyen! Számítsuk is ki ezt a Fourier sort!

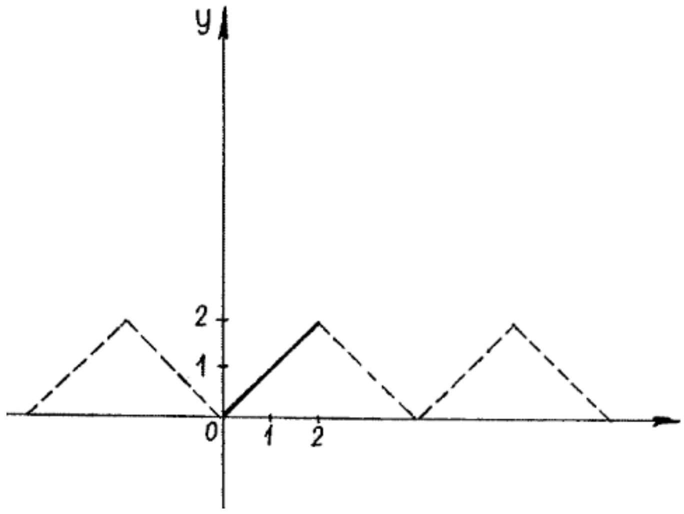
   Megoldás: Mivel tisztán koszinuszos Fourier sort szeretnénk, így páros függvénnyé kell kiterjesztenünk. Így legyen a kiterjesztés a $[-\pi, \pi]$ halmazon

$$f(x) = \begin{cases} -1 & \text{ha } x \in [0, \pi], \\ -1 & \text{ha } x \in [-\pi,0), \end{cases}$$

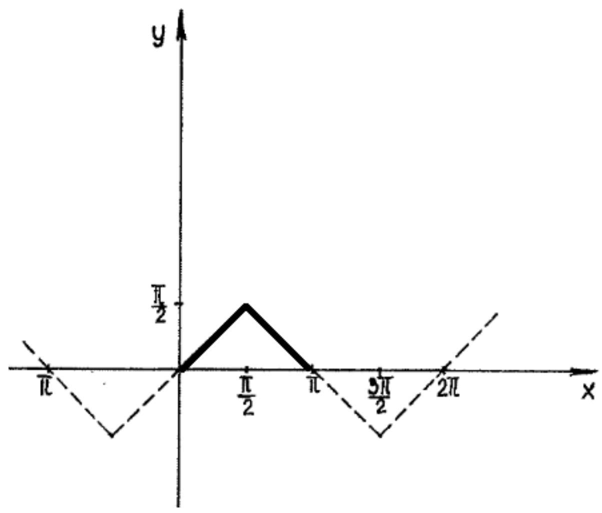
   és $f(x) = f(x + 2\pi)$.

   Ekkor az együtthatók

$$a_0 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} -1dx = \frac{1}{2\pi}(-2\pi) = -1,$$



1. ábra. Az $x \in [0,2]$ intervallumon értelmezett $f(x) = x$ függvény "meghosszabbítása" úgy, hogy Fourier sora tisztán koszinuszos legyen. Először tükrözzük az y tengelyre (így megkapva a $[-2,2]$ intervallumon a "V" alakot), majd ezt végtelenszer egymás mellé tesszük.



2. ábra. Az $x \in [0, \pi]$ intervallumon értelmezett $f(x) = -|x-1|+1$ függvény "meghosszabbítása" úgy, hogy Fourier sora tisztán szinuszos legyen. Először középpontosan tükrözzük az origóra (így megkapva a $[-\pi, \pi]$ intervallumon lévő szakaszt), majd ezt végtelenszer egymás mellé tesszük.

$b_k = 0$ és

$$a_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(kx)dx = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(-1)\cos(kx)dx =$$
$$= -\frac{1}{\pi}\left[\frac{\sin(kx)}{k}\right]_{-\pi}^{\pi} = -\frac{1}{\pi}\left[\frac{\sin(k\pi)}{k} - \frac{\sin(-k\pi)}{k}\right] = 0.$$

2. Tekintsük azt az $f : [-\pi,0] \to \mathbb{R}$ függvényt, mely $f(x) = 1$ módon van definiálva. Terjesszük ki ezt a függvényt úgy, hogy minden $x \in \mathbb{R}$ esetén értelmezve legyen, és Fourier sora tisztán szinuszos legyen! Számítsuk is ki ezt a Fourier sort!

   Megoldás: Mivel tisztán szinuszos Fourier sort szeretnénk, így páratlan függvénnyé kell kiterjesztenünk. Így legyen a kiterjesztés a $[-\pi, \pi]$ halmazon

$$f(x) = \begin{cases} -1 & \text{ha } x \in [0,\pi], \\ 1 & \text{ha } x \in [-\pi,0), \end{cases}$$

   és $f(x) = f(x + 2\pi)$.

   Ekkor az együtthatók

$$a_0 = \frac{1}{2\pi}\left(\int_{-\pi}^{0} 1dx + \int_{0}^{\pi} -1dx\right) = \frac{2}{\pi}(\pi - \pi) = 0,$$

   $a_k = 0$ és

$$b_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin(kx)dx = \frac{1}{\pi}\left(\int_{-\pi}^{0}\sin(kx)dx + \int_{0}^{\pi}(-1)\sin(kx)dx\right) =$$

$$= \frac{1}{\pi}\left(\left[\frac{-\cos(kx)}{k}\right]_{-\pi}^{0} - \left[\frac{-\cos(kx)}{k}\right]_{0}^{\pi}\right) = \frac{1}{\pi}\left(\left[\frac{-1}{k} - \frac{-\cos(-k\pi)}{k}\right] - \left[\frac{-\cos(k\pi)}{k} - \frac{-1}{k}\right]\right) =$$

$$= \frac{1}{\pi}\left(-\frac{2}{k} + 2\frac{\cos(k\pi)}{k}\right) = \frac{2}{k\pi}\left(\cos(k\pi) - 1\right) = \begin{cases} 0 & \text{ha } k = 2m \ \ (m \in \mathbb{Z}), \\ \dfrac{-4}{k\pi} & \text{ha } k = 2m+1 \ \ (m \in \mathbb{Z}). \end{cases}$$

3. Tekintsük azt az $f : [0, \pi] \to \mathbb{R}$ függvényt, mely az alábbi módon van definiálva:

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{ha } x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right], \\ 1 & \text{ha } x \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right]. \end{cases}$$

Terjesszük ki ezt a függvényt úgy, hogy minden $x \in \mathbb{R}$ esetén értelmezve legyen, és Fourier sora tisztán koszinuszos legyen! Számítsuk is ki ezt a Fourier sort!

Megoldás: Mivel tisztán koszinuszos Fourier sort szeretnénk, így páros függvénnyé kell kiterjesztenünk. Így legyen a kiterjesztés a $[-\pi, \pi]$ halmazon

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{ha } x \in \left[-\pi, -\frac{\pi}{2}\right) \cup \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right], \\ 0 & \text{máshol,} \end{cases}$$

és $f(x) = f(x + 2\pi)$.

Ekkor az együtthatók

$$a_0 = \frac{1}{2\pi}\left(\int_{-\pi}^{-\pi/2} 1dx + \int_{\pi/2}^{\pi} 1dx\right) = \frac{1}{2\pi}\pi = \frac{1}{2},$$

$b_k = 0$ és

$$a_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(kx)dx = \frac{1}{\pi}\left(\int_{-\pi}^{-\pi/2} \cos(kx)dx + \int_{\pi/2}^{\pi} \cos(kx)dx\right) =$$

$$= \frac{1}{\pi}\left(\left[\frac{\sin(kx)}{k}\right]_{-\pi}^{-\pi/2} + \left[\frac{\sin(kx)}{k}\right]_{\pi/2}^{\pi}\right) = \frac{1}{\pi}\left(\left[\frac{\sin\left(\frac{-k\pi}{2}\right)}{k} - 0\right] + \left[0 - \frac{\sin\left(\frac{k\pi}{2}\right)}{k}\right]\right) =$$

$$= \frac{1}{\pi}\left(-\frac{\sin\left(\frac{k\pi}{2}\right)}{k} - \frac{\sin\left(\frac{k\pi}{2}\right)}{k}\right) = -\frac{2}{k\pi}\sin\left(\frac{k\pi}{2}\right) = \begin{cases} 0 & \text{ha } k = 2m \ \ (m \in \mathbb{Z}) \\ \dfrac{-2}{k\pi} & \text{ha } k = 4m+1 \ \ (m \in \mathbb{Z}) \\ \dfrac{2}{k\pi} & \text{ha } k = 4m+3 \ \ (m \in \mathbb{Z}) \end{cases}$$

4. Tekintsük azt az $f : [0, \pi] \to \mathbb{R}$ függvényt, mely az alábbi módon van definiálva:

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{ha } x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right], \\ 0 & \text{ha } x \in \{0\} \cup \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right]. \end{cases}$$

Terjesszük ki ezt a függvényt úgy, hogy minden $x \in \mathbb{R}$ esetén értelmezve legyen, és Fourier sora tisztán szinuszos legyen! Számítsuk is ki ezt a Fourier sort!

Megoldás: Mivel tisztán szinuszos Fourier sort szeretnénk, így páratlan függvénnyé kell kiterjesztenünk. Így legyen a kiterjesztés a $[-\pi, \pi]$ halmazon

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{ha } x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right], \\ -1 & \text{ha } x \in \left[-\frac{\pi}{2}, 0\right), \\ 0 & \text{máshol,} \end{cases}$$

és $f(x) = f(x + 2\pi)$.

Ekkor az együtthatók

$$a_0 = \frac{1}{2\pi}\left(\int_{-\pi/2}^{0} (-1)dx + \int_{0}^{\pi/2} 1dx\right) = \frac{1}{2\pi}\left(-\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2}\right) = 0,$$

$a_k = 0$ és

$$b_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin(kx)dx = \frac{1}{\pi}\left(\int_{-\pi/2}^{0}(-1)\sin(kx)dx + \int_{0}^{\pi/2}\sin(kx)dx\right) =$$

$$= \frac{1}{\pi}\left(\left[-\frac{-\cos(kx)}{k}\right]_{-\pi/2}^{0} + \left[\frac{-\cos(kx)}{k}\right]_{0}^{\pi/2}\right) = \frac{1}{\pi}\left(\left[\frac{1}{k} - \frac{\cos\left(\frac{-k\pi}{2}\right)}{k}\right] + \left[-\frac{\cos\left(\frac{k\pi}{2}\right)}{k} + \frac{1}{k}\right]\right) =$$

$$= \frac{2}{k\pi}\left(1 - \cos\left(\frac{k\pi}{2}\right)\right) = \begin{cases} 0 & \text{ha } k = 2m \ \ (m \in \mathbb{Z}) \\ \dfrac{4}{k\pi} & \text{ha } k = 4m+2 \ \ (m \in \mathbb{Z}) \\ \dfrac{2}{k\pi} & \text{ha } k = 2m+1 \ \ (m \in \mathbb{Z}) \end{cases}$$

5. Tekintsük azt az $f : [0,2] \to \mathbb{R}$ függvényt, mely az alábbi módon van definiálva:

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{ha } x \in [0,1]\,, \\ 1 & \text{ha } x \in \left(1, \dfrac{3}{2}\right], \\ -2 & \text{ha } x \in \left(\dfrac{3}{2}, 2\right], \end{cases}$$

Terjesszük ki ezt a függvényt úgy, hogy minden $x \in \mathbb{R}$ esetén értelmezve legyen, és Fourier sora tisztán koszinuszos legyen! Számítsuk is ki ezt a Fourier sort!

Megoldás: Mivel tisztán koszinuszos Fourier sort szeretnénk, így páros függvénnyé kell kiterjesztenünk. Így legyen a kiterjesztés a $[-2,2]$ halmazon

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{ha } x \in [-1,1]\,, \\ 1 & \text{ha } x \in \left[-\dfrac{3}{2}, -1\right) \cup \left(1, \dfrac{3}{2}\right], \\ -2 & \text{ha } x \in \left[-2, -\dfrac{3}{2}\right) \cup \left(\dfrac{3}{2}, 2\right], \end{cases}$$

és $f(x) = f(x+4)$.

Ekkor az együtthatók

$$a_0 = \frac{1}{4}\left(\int_{-3/2}^{-1} 1dx + \int_{1}^{3/2} 1dx + \int_{-2}^{-3/2}(-2)dx + \int_{3/2}^{2}(-2)dx\right) = \frac{1}{4}\left(1 + (-2)\right) = -\frac{1}{4},$$

$b_k = 0$ és

$$a_k = \frac{2}{4}\int_{-2}^{2} f(x)\cos\left(\frac{2\pi k}{4}x\right)dx =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\int_{-2}^{-3/2}(-2)\cos\left(\frac{\pi k}{2}x\right)dx + \int_{-3/2}^{-1}\cos\left(\frac{\pi k}{2}x\right)dx + \right.$$

$$\left. + \int_{1}^{3/2}\cos\left(\frac{\pi k}{2}x\right)dx + \int_{3/2}^{2}(-2)\cos\left(\frac{\pi k}{2}x\right)dx\right)dx =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{(-2)}{\frac{\pi k}{2}}\left[\sin\left(\frac{\pi k}{2}x\right)\right]_{-2}^{-3/2} + \frac{1}{\frac{\pi k}{2}}\left[\sin\left(\frac{\pi k}{2}x\right)\right]_{-3/2}^{-1} + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{\frac{\pi k}{2}}\left[\sin\left(\frac{\pi k}{2}x\right)\right]_{1}^{3/2} + \frac{(-2)}{\frac{\pi k}{2}}\left[\sin\left(\frac{\pi k}{2}x\right)\right]_{3/2}^{2}\right)dx =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{-4}{\pi k}\left[\sin\left(-\frac{3\pi}{4}k\right) - \sin\left(-\pi k\right)\right] + \frac{2}{\pi k}\left[\sin\left(-\frac{\pi k}{2}\right) - \sin\left(-\frac{3\pi}{4}k\right)\right] + \right.$$

$$\left. + \frac{2}{\pi k}\left[\sin\left(\frac{3\pi}{4}k\right) - \sin\left(\frac{\pi}{2}k\right)\right] + \frac{-4}{\pi k}\left[\sin\left(\pi k\right) - \sin\left(\frac{3\pi}{4}k\right)\right]\right)dx =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{-4}{\pi k}\left[-\sin\left(\frac{3\pi}{4}k\right) + \sin\left(\pi k\right)\right] + \frac{2}{\pi k}\left[-\sin\left(\frac{\pi k}{2}\right) + \sin\left(\frac{3\pi}{4}k\right)\right] + \right.$$

$$+\frac{2}{\pi k}\left[\sin\left(\frac{3\pi}{4}k\right)-\sin\left(\frac{\pi}{2}k\right)\right]+\frac{-4}{\pi k}\left[\sin(\pi k)-\sin\left(\frac{3\pi}{4}k\right)\right]\Bigg)\,dx=$$
$$=\frac{1}{2}\left(\frac{-8}{\pi k}\sin(\pi k)+\frac{-4}{\pi k}\sin\left(\frac{\pi k}{2}\right)+\frac{12}{\pi k}\sin\left(\frac{3\pi}{4}k\right)\right)$$

Használjuk fel az alábbiakat:

- $\sin(\pi k)=0$ bármely egész k esetén,
- $\sin\left(\frac{\pi k}{2}\right)=\begin{cases}1 & \text{ha } k=4m+1\ (m\in\mathbb{Z}),\\ -1 & \text{ha } k=4m+3\ (m\in\mathbb{Z}),\\ 0 & \text{ha } k=2m\ (m\in\mathbb{Z}).\end{cases}$
- $\sin\left(\frac{3\pi}{4}k\right)=\begin{cases}-1 & \text{ha } k=4m+1\ (m\in\mathbb{Z}),\\ 1 & \text{ha } k=4m+3\ (m\in\mathbb{Z}),\\ 0 & \text{ha } k=2m\ (m\in\mathbb{Z}).\end{cases}$

Ezek alapján

$$a_k=\begin{cases}\frac{1}{2}\left(\frac{-4}{\pi k}-\frac{12}{\pi k}\right)=\frac{-8}{\pi k} & \text{ha } k=4m+1\ (m\in\mathbb{Z}),\\ \frac{1}{2}\left(\frac{4}{\pi k}+\frac{12}{\pi k}\right)=\frac{8}{\pi k} & \text{ha } k=4m+3\ (m\in\mathbb{Z}),\\ 0 & \text{ha } k=2m\ (m\in\mathbb{Z}).\end{cases}$$

6. Tekintsük azt az $f:[0,2]\to\mathbb{R}$ függvényt, mely az alábbi módon van definiálva:

$$f(x)=\begin{cases}1 & \text{ha } x\in\left[0,\frac{1}{2}\right],\\ -1 & \text{ha } x\in\left(\frac{1}{2},1\right],\\ 0 & \text{ha } x\in(1,2],\end{cases}$$

Terjesszük ki ezt a függvényt úgy, hogy minden $x\in\mathbb{R}$ esetén értelmezve legyen, és Fourier sora tisztán szinuszos legyen! Számítsuk is ki ezt a Fourier sort!

Megoldás: Mivel tisztán szinuszos Fourier sort szeretnénk, így páratlan függvénnyé kell kiterjesztenünk. Így legyen a kiterjesztés a $[-2,2]$ halmazon

$$f(x)=\begin{cases}1 & \text{ha } x\in\left[0,\frac{1}{2}\right]\cup\left[-1,-\frac{1}{2}\right),\\ -1 & \text{ha } x\in\left(\frac{1}{2},1\right]\cup\left[-\frac{1}{2},0\right),\\ 0 & \text{máshol,}\end{cases}$$

és $f(x)=f(x+4)$.

Ekkor az együtthatók

$$a_0=\frac{1}{4}\left(\int_0^{1/2}1dx+\int_{-1}^{-1/2}1dx+\int_{1/2}^{1}(-1)dx+\int_{-1/2}^{0}(-1)dx\right)=\frac{1}{4}(1+(-1))=0,$$

$a_k=0$ és

$$b_k=\frac{2}{4}\int_{-2}^{2}f(x)\sin\left(\frac{2\pi k}{4}x\right)dx=$$
$$=\frac{1}{2}\Bigg(\int_0^{1/2}\sin\left(\frac{\pi k}{2}x\right)dx+\int_{-1}^{-1/2}\sin\left(\frac{\pi k}{2}x\right)dx+$$
$$\int_{1/2}^{1}(-1)\sin\left(\frac{\pi k}{2}x\right)dx+\int_{-1/2}^{0}(-1)\sin\left(\frac{\pi k}{2}x\right)dx\Bigg)=$$
$$=\frac{1}{2}\Bigg(\frac{-1}{\frac{\pi k}{2}}\left[\cos\left(\frac{\pi k}{2}x\right)\right]_0^{1/2}+\frac{-1}{\frac{\pi k}{2}}\left[\cos\left(\frac{\pi k}{2}x\right)\right]_{-1}^{-1/2}+$$

$$\frac{1}{\frac{\pi k}{2}}\left[\cos\left(\frac{\pi k}{2}x\right)\right]_{1/2}^{1}+\frac{1}{\frac{\pi k}{2}}\left[\cos\left(\frac{\pi k}{2}x\right)\right]_{-1/2}^{0}\right)=$$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{-2}{\pi k}\left[\cos\left(\frac{\pi k}{4}\right)-\cos(0)\right]+\frac{-2}{\pi k}\left[\cos\left(-\frac{\pi k}{4}\right)-\cos\left(-\frac{\pi k}{2}\right)\right]+\right.$$

$$\left.\frac{2}{\pi k}\left[\cos\left(\frac{\pi k}{2}\right)-\cos\left(\frac{\pi k}{4}\right)\right]+\frac{2}{\pi k}\left[\cos(0)-\cos\left(-\frac{\pi k}{4}\right)\right]\right)=$$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{-2}{\pi k}\left[\cos\left(\frac{\pi k}{4}\right)-1\right]+\frac{-2}{\pi k}\left[\cos\left(\frac{\pi k}{4}\right)-\cos\left(\frac{\pi k}{2}\right)\right]+\right.$$

$$\left.\frac{2}{\pi k}\left[\cos\left(\frac{\pi k}{2}\right)-\cos\left(\frac{\pi k}{4}\right)\right]+\frac{2}{\pi k}\left[1-\cos\left(\frac{\pi k}{4}\right)\right]\right)=$$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{4}{\pi k}+\frac{-8}{\pi k}\cos\left(\frac{\pi k}{4}\right)+\frac{4}{\pi k}\cos\left(\frac{\pi k}{2}\right)\right)$$

Használjuk fel az alábbiakat:

$$-\cos\left(\frac{\pi k}{4}\right)=\begin{cases}\frac{\sqrt{2}}{2} & \text{ha } k=8m+1 \text{ vagy } k=8m+7\ (m\in\mathbb{Z}),\\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & \text{ha } k=8m+3 \text{ vagy } k=8m+5\ (m\in\mathbb{Z}),\\ 0 & \text{ha } k=8m+2 \text{ vagy } k=8m+6\ (m\in\mathbb{Z}),\\ 1 & \text{ha } k=8m\ (m\in\mathbb{Z}),\\ -1 & \text{ha } k=8m+4\ (m\in\mathbb{Z}),\end{cases}$$

$$-\cos\left(\frac{\pi k}{2}\right)=\begin{cases}1 & \text{ha } k=4m\ (m\in\mathbb{Z}),\\ 0 & \text{ha } k=4m+1 \text{ vagy } k=4m+3\ (m\in\mathbb{Z}),\\ -1 & \text{ha } k=4m+2\ (m\in\mathbb{Z}).\end{cases}$$

Így tehát

$$a_k=\begin{cases}\frac{1}{2}\left(\frac{4}{\pi k}+\frac{-8}{\pi k}\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=\frac{2(1-\sqrt{2})}{\pi k} & \text{ha } k=8m+1\ (m\in\mathbb{Z}),\\ \frac{1}{2}\left(\frac{4}{\pi k}-\frac{4}{\pi k}\right)=0 & \text{ha } k=8m+2\ (m\in\mathbb{Z}),\\ \frac{1}{2}\left(\frac{4}{\pi k}-\frac{-8}{\pi k}\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=\frac{2(1+\sqrt{2})}{\pi k} & \text{ha } k=8m+3\ (m\in\mathbb{Z}),\\ \frac{1}{2}\left(\frac{4}{\pi k}-\frac{-8}{\pi k}+\frac{4}{\pi k}\right)=\frac{8}{\pi k} & \text{ha } k=8m+4\ (m\in\mathbb{Z}),\\ \frac{1}{2}\left(\frac{4}{\pi k}-\frac{-8}{\pi k}\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=\frac{2(1+\sqrt{2})}{\pi k} & \text{ha } k=8m+5\ (m\in\mathbb{Z}),\\ \frac{1}{2}\left(\frac{4}{\pi k}-\frac{4}{\pi k}\right)=0 & \text{ha } k=8m+6\ (m\in\mathbb{Z}),\\ \frac{1}{2}\left(\frac{4}{\pi k}+\frac{-8}{\pi k}\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=\frac{2(1-\sqrt{2})}{\pi k} & \text{ha } k=8m+7\ (m\in\mathbb{Z}),\\ \frac{1}{2}\left(\frac{4}{\pi k}+\frac{-8}{\pi k}+\frac{4}{\pi k}\right)=0 & \text{ha } k=8m\ (m\in\mathbb{Z}).\end{cases}$$