

Fourier sorok

Matematika G szigorlat segédlet

Elmélet

Egy P ($P > 0$) periódusú $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ függvény **Fourier sorát** az alábbi képlet adja meg:

$$(\mathcal{F}f)(x) = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos\left(\frac{2\pi k}{P}x\right) + b_k \sin\left(\frac{2\pi k}{P}x\right),$$

ahol

$$a_0 = \frac{1}{P} \int_0^P f(x) dx,$$
$$a_k = \frac{2}{P} \int_0^P f(x) \cos\left(\frac{2\pi k}{P}x\right) dx,$$
$$b_k = \frac{2}{P} \int_0^P f(x) \sin\left(\frac{2\pi k}{P}x\right) dx.$$

Ha egy f függvény páros (azaz grafikonja tengelyesen szimmetrikus az y tengelyre, vagy másként $f(x) = -f(x)$ minden $x \in \text{Dom}(f)$ -re), akkor $b_k = 0$. Ekkor a függvény Fourier sorában csak koszinuszos tagok vannak, és ekkor **tisztán koszinuszos Fourier sorról** beszélhetünk.

Ha egy függvény páratlan (azaz grafikonja középpontosan szimmetrikus az origóra, vagy másként $f(x) = -f(-x)$ minden $x \in \text{Dom}(f)$ -re), akkor $a_k = 0$. Ekkor a függvény Fourier sorában csak szinuszos tagok vannak, és ekkor **tisztán szinuszos Fourier sorról** beszélhetünk.

Ha egy függvény egy adott $[0, a]$ intervallumon van értelmezve, akkor periodikussá tehetjük olyan módon, hogy a függvény grafikonját "lemásoljuk" egymás mellé végtelen sokszor. Ezt egyszerűen az $f(x) = f(x + a)$ szabállyal tehetjük meg.

Ha egy függvény egy adott $[0, a]$ intervallumon van értelmezve, és szeretnénk belőle tisztán koszinuszos Fourier sort kapni, akkor a függvény grafikonját tengelyesen tükrözzük az y tengelyre (így megkapva a grafikon a $[-a, 0]$ intervallumon), majd az így kapott, $[-a, a]$ intervallumon lévő képet tükrözzük végtelen sokszor az $f(x) = f(x + 2a)$ szabály segítségével (hiszen ekkor a másolandó grafikon hossza $2a$). Lásd az 1. ábrát!

Ha egy függvény egy adott $[0, a]$ intervallumon van értelmezve, és szeretnénk belőle tisztán szinuszos Fourier sort kapni, akkor a függvény grafikonját középpontosan tükrözzük az origóra (így megkapva a grafikon a $[-a, 0]$ intervallumon), majd az így kapott, $[-a, a]$ intervallumon lévő képet tükrözzük végtelen sokszor az $f(x) = f(x + 2a)$ szabály segítségével (hiszen ekkor a másolandó grafikon hossza $2a$). Lásd a 2. ábrát!

1. Tekintsük azt az $f : [0, \pi] \rightarrow \mathbb{R}$ függvényt, mely $f(x) = -1$ módon van definiálva. Terjesszük ki ezt a függvényt úgy, hogy minden $x \in \mathbb{R}$ esetén értelmezve legyen, és Fourier sora tisztán koszinuszos legyen! Számítsuk is ki ezt a Fourier sort!

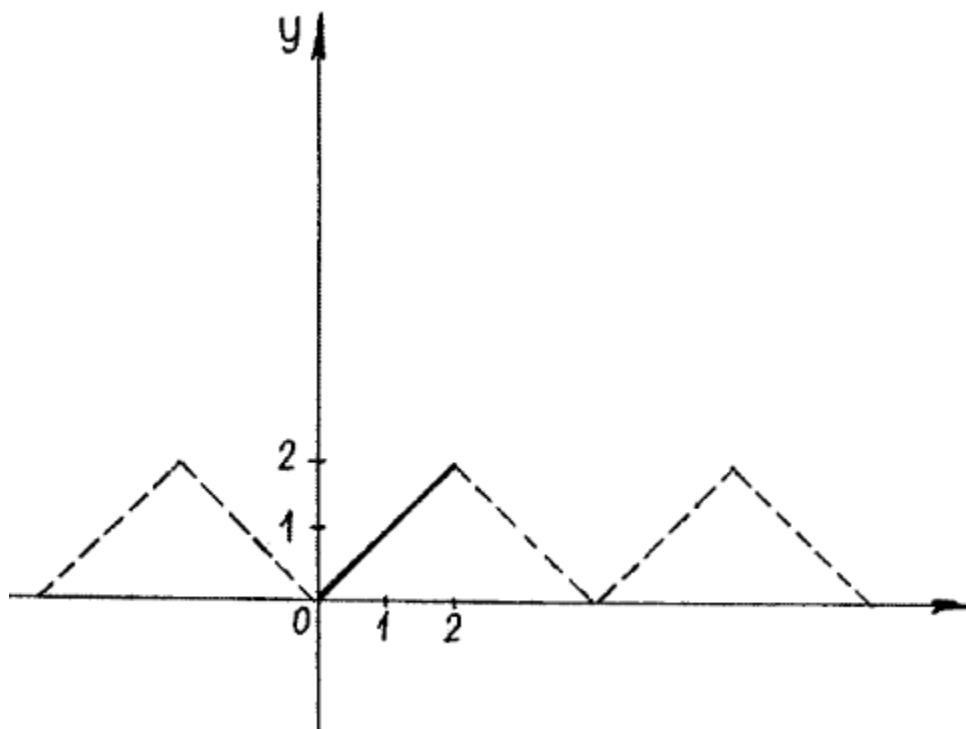
Megoldás: Mivel tisztán koszinuszos Fourier sort szeretnénk, így páros függvénné kell kiterjesztenünk. Így legyen a kiterjesztés a $[-\pi, \pi]$ halmazon

$$f(x) = \begin{cases} -1 & \text{ha } x \in [0, \pi], \\ -1 & \text{ha } x \in [-\pi, 0), \end{cases}$$

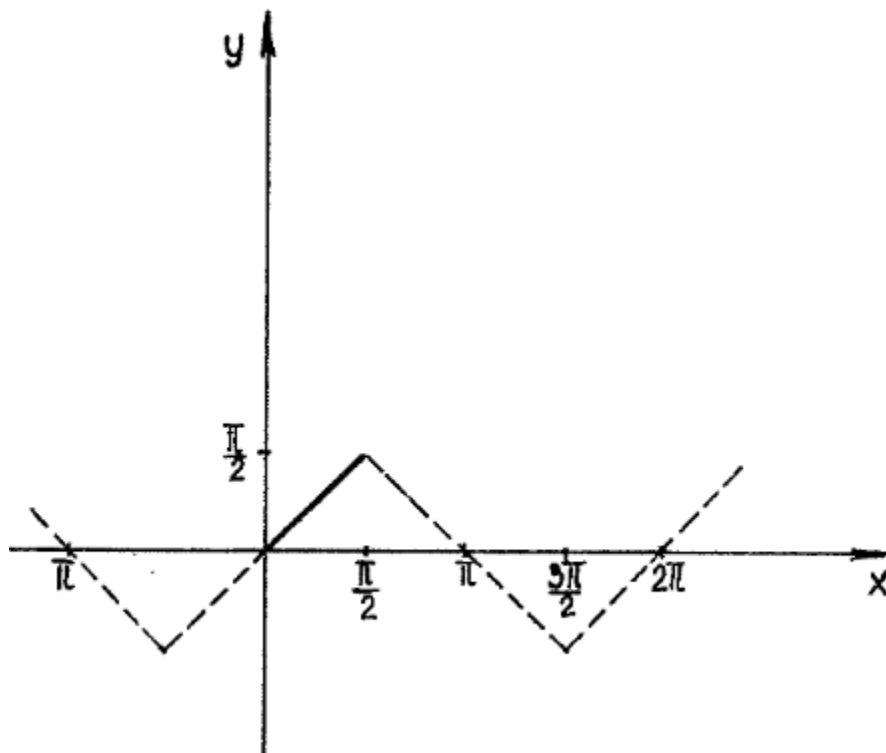
és $f(x) = f(x + 2\pi)$.

Ekkor az együtthatók

$$a_0 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} -1 dx = \frac{1}{2\pi} (-2\pi) = -1,$$



1. ábra. Az $x \in [0, 2]$ intervallumon értelmezett $f(x) = x$ függvény "meghosszabbítása" úgy, hogy Fourier sora tisztán koszinuszos legyen. Először tükrözzük az y tengelyre (így megkapva a $[-2, 2]$ intervallumon a "V" alakot), majd ezt végelenszer egymás mellé tesszük.



2. ábra. Az $x \in [0, \pi/2]$ intervallumon értelmezett $f(x) = x$ függvény "meghosszabbítása" úgy, hogy Fourier sora tisztán szinuszos legyen. Először középpontosan tükrözzük az origóra (így megkapva a $[-\pi/2, \pi/2]$ intervallumon lévő egyenest), majd ezt végelenszer egymás mellé tesszük.

$b_k = 0$ és

$$\begin{aligned} a_k &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(kx) dx = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (-1) \cos(kx) dx = \\ &= -\frac{1}{\pi} \left[\frac{\sin(kx)}{k} \right]_{-\pi}^{\pi} = -\frac{1}{\pi} \left[\frac{\sin(k\pi)}{k} - \frac{\sin(-k\pi)}{k} \right] = 0. \end{aligned}$$

2. Tekintsük azt az $f : [-\pi, 0] \rightarrow \mathbb{R}$ függvényt, mely $f(x) = 1$ módon van definiálva. Terjesszük ki ezt a függvényt úgy, hogy minden $x \in \mathbb{R}$ esetén értelmezve legyen, és Fourier sora tisztán szinuszos legyen! Számítsuk is ki ezt a Fourier sort!

Megoldás: Mivel tisztán szinuszos Fourier sort szeretnénk, így páratlan függvénné kell kiterjesztenünk. Így legyen a kiterjesztés a $[-\pi, \pi]$ halmazon

$$f(x) = \begin{cases} -1 & \text{ha } x \in [0, \pi], \\ 1 & \text{ha } x \in [-\pi, 0), \end{cases}$$

és $f(x) = f(x + 2\pi)$.

Ekkor az együtthatók

$$a_0 = \frac{1}{2\pi} \left(\int_{-\pi}^0 1 dx + \int_0^{\pi} -1 dx \right) = \frac{2}{\pi} (\pi - \pi) = 0,$$

$a_k = 0$ és

$$\begin{aligned} b_k &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin(kx) dx = \frac{1}{\pi} \left(\int_{-\pi}^0 \sin(kx) dx + \int_0^{\pi} (-1) \sin(kx) dx \right) = \\ &= \frac{1}{\pi} \left(\left[-\frac{\cos(kx)}{k} \right]_{-\pi}^0 - \left[-\frac{\cos(kx)}{k} \right]_0^{\pi} \right) = \frac{1}{\pi} \left(\left[\frac{-1}{k} - \frac{-\cos(-k\pi)}{k} \right] - \left[\frac{-\cos(k\pi)}{k} - \frac{-1}{k} \right] \right) = \\ &= \frac{1}{\pi} \left(-\frac{2}{k} + 2 \frac{\cos(k\pi)}{k} \right) = \frac{2}{k\pi} (\cos(k\pi) - 1) = \begin{cases} 0 & \text{ha } k = 2m \quad (m \in \mathbb{Z}), \\ -\frac{4}{k\pi} & \text{ha } k = 2m + 1 \quad (m \in \mathbb{Z}). \end{cases} \end{aligned}$$

3. Tekintsük azt az $f : [0, \pi] \rightarrow \mathbb{R}$ függvényt, mely az alábbi módon van definiálva:

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{ha } x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right], \\ 1 & \text{ha } x \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right]. \end{cases}$$

Terjesszük ki ezt a függvényt úgy, hogy minden $x \in \mathbb{R}$ esetén értelmezve legyen, és Fourier sora tisztán koszinuszos legyen! Számítsuk is ki ezt a Fourier sort!

Megoldás: Mivel tisztán koszinuszos Fourier sort szeretnénk, így páros függvénné kell kiterjesztenünk. Így legyen a kiterjesztés a $[-\pi, \pi]$ halmazon

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{ha } x \in \left[-\pi, -\frac{\pi}{2}\right) \cup \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right], \\ 0 & \text{máshol,} \end{cases}$$

és $f(x) = f(x + 2\pi)$.

Ekkor az együtthatók

$$a_0 = \frac{1}{2\pi} \left(\int_{-\pi}^{-\pi/2} 1 dx + \int_{\pi/2}^{\pi} 1 dx \right) = \frac{1}{2\pi} \pi = \frac{1}{2},$$

$b_k = 0$ és

$$\begin{aligned} a_k &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(kx) dx = \frac{1}{\pi} \left(\int_{-\pi}^{-\pi/2} \cos(kx) dx + \int_{\pi/2}^{\pi} \cos(kx) dx \right) = \\ &= \frac{1}{\pi} \left(\left[\frac{\sin(kx)}{k} \right]_{-\pi}^{-\pi/2} + \left[\frac{\sin(kx)}{k} \right]_{\pi/2}^{\pi} \right) = \frac{1}{\pi} \left(\left[\frac{\sin\left(-\frac{k\pi}{2}\right)}{k} - 0 \right] + \left[0 - \frac{\sin\left(\frac{k\pi}{2}\right)}{k} \right] \right) = \\ &= \frac{1}{\pi} \left(-\frac{\sin\left(\frac{k\pi}{2}\right)}{k} - \frac{\sin\left(\frac{k\pi}{2}\right)}{k} \right) = -\frac{2}{k\pi} \sin\left(\frac{k\pi}{2}\right) = \begin{cases} 0 & \text{ha } k = 2m \quad (m \in \mathbb{Z}) \\ -\frac{2}{k\pi} & \text{ha } k = 4m + 1 \quad (m \in \mathbb{Z}) \\ \frac{2}{k\pi} & \text{ha } k = 4m + 3 \quad (m \in \mathbb{Z}) \end{cases} \end{aligned}$$

4. Tekintsük azt az $f : [0, \pi] \rightarrow \mathbb{R}$ függvényt, mely az alábbi módon van definiálva:

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{ha } x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right], \\ 0 & \text{ha } x \in \{0\} \cup \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right]. \end{cases}$$

Terjesszük ki ezt a függvényt úgy, hogy minden $x \in \mathbb{R}$ esetén értelmezve legyen, és Fourier sora tisztán szinuszos legyen! Számítsuk is ki ezt a Fourier sort!

Megoldás: Mivel tisztán szinuszos Fourier sort szeretnénk, így páratlan függvénné kell kiterjesztenünk. Így legyen a kiterjesztés a $[-\pi, \pi]$ halmazon

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{ha } x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right], \\ -1 & \text{ha } x \in \left[-\frac{\pi}{2}, 0\right), \\ 0 & \text{máshol,} \end{cases}$$

és $f(x) = f(x + 2\pi)$.

Ekkor az együtthatók

$$a_0 = \frac{1}{2\pi} \left(\int_{-\pi/2}^0 (-1) dx + \int_0^{\pi/2} 1 dx \right) = \frac{1}{2\pi} \left(-\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} \right) = 0,$$

$a_k = 0$ és

$$\begin{aligned} b_k &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin(kx) dx = \frac{1}{\pi} \left(\int_{-\pi/2}^0 (-1) \sin(kx) dx + \int_0^{\pi/2} \sin(kx) dx \right) = \\ &= \frac{1}{\pi} \left(\left[-\frac{\cos(kx)}{k} \right]_{-\pi/2}^0 + \left[\frac{\cos(kx)}{k} \right]_0^{\pi/2} \right) = \frac{1}{\pi} \left(\left[\frac{1}{k} - \frac{\cos\left(\frac{-k\pi}{2}\right)}{k} \right] + \left[-\frac{\cos\left(\frac{k\pi}{2}\right)}{k} + \frac{1}{k} \right] \right) = \\ &= \frac{2}{k\pi} \left(1 - \cos\left(\frac{k\pi}{2}\right) \right) = \begin{cases} 0 & \text{ha } k = 2m \quad (m \in \mathbb{Z}) \\ \frac{4}{k\pi} & \text{ha } k = 4m + 2 \quad (m \in \mathbb{Z}) \\ \frac{2}{k\pi} & \text{ha } k = 2m + 1 \quad (m \in \mathbb{Z}) \end{cases} \end{aligned}$$

5. Tekintsük azt az $f : [0, 2] \rightarrow \mathbb{R}$ függvényt, mely az alábbi módon van definiálva:

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{ha } x \in [0, 1], \\ 1 & \text{ha } x \in \left(1, \frac{3}{2}\right], \\ -2 & \text{ha } x \in \left(\frac{3}{2}, 2\right], \end{cases}$$

Terjesszük ki ezt a függvényt úgy, hogy minden $x \in \mathbb{R}$ esetén értelmezve legyen, és Fourier sora tisztán koszinuszos legyen! Számítsuk is ki ezt a Fourier sort!

Megoldás: Mivel tisztán koszinuszos Fourier sort szeretnénk, így páros függvénné kell kiterjesztenünk. Így legyen a kiterjesztés a $[-2, 2]$ halmazon

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{ha } x \in [-1, 1], \\ 1 & \text{ha } x \in \left[-\frac{3}{2}, -1\right) \cup \left(1, \frac{3}{2}\right], \\ -2 & \text{ha } x \in \left[-2, -\frac{3}{2}\right) \cup \left(\frac{3}{2}, 2\right], \end{cases}$$

és $f(x) = f(x + 4)$.

Ekkor az együtthatók

$$a_0 = \frac{1}{4} \left(\int_{-3/2}^{-1} 1 dx + \int_{-1}^{-3/2} 1 dx + \int_{-2}^{-3/2} (-2) dx + \int_{3/2}^2 (-2) dx \right) = \frac{1}{4} (1 + (-2)) = -\frac{1}{4},$$

$b_k = 0$ és

$$\begin{aligned}
 a_k &= \frac{2}{4} \int_{-2}^2 f(x) \cos\left(\frac{2\pi k}{4}x\right) dx = \\
 &= \frac{1}{2} \left(\int_{-2}^{-3/2} (-2) \cos\left(\frac{\pi k}{2}x\right) dx + \int_{-3/2}^{-1} \cos\left(\frac{\pi k}{2}x\right) dx + \right. \\
 &\quad \left. + \int_1^{3/2} \cos\left(\frac{\pi k}{2}x\right) dx + \int_{3/2}^2 (-2) \cos\left(\frac{\pi k}{2}x\right) dx \right) dx = \\
 &= \frac{1}{2} \left(\frac{(-2)}{\frac{\pi k}{2}} \left[\sin\left(\frac{\pi k}{2}x\right) \right]_{-2}^{-3/2} + \frac{1}{\frac{\pi k}{2}} \left[\sin\left(\frac{\pi k}{2}x\right) \right]_{-3/2}^{-1} + \right. \\
 &\quad \left. + \frac{1}{\frac{\pi k}{2}} \left[\sin\left(\frac{\pi k}{2}x\right) \right]_1^{3/2} + \frac{(-2)}{\frac{\pi k}{2}} \left[\sin\left(\frac{\pi k}{2}x\right) \right]_{3/2}^2 \right) dx = \\
 &= \frac{1}{2} \left(\frac{-4}{\pi k} \left[\sin\left(-\frac{3\pi}{4}k\right) - \sin(-\pi k) \right] + \frac{2}{\pi k} \left[\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) - \sin\left(-\frac{3\pi}{4}k\right) \right] + \right. \\
 &\quad \left. + \frac{2}{\pi k} \left[\sin\left(\frac{3\pi}{4}k\right) - \sin\left(\frac{\pi}{2}k\right) \right] + \frac{-4}{\pi k} \left[\sin(\pi k) - \sin\left(\frac{3\pi}{4}k\right) \right] \right) dx = \\
 &= \frac{1}{2} \left(\frac{-4}{\pi k} \left[-\sin\left(\frac{3\pi}{4}k\right) + \sin(\pi k) \right] + \frac{2}{\pi k} \left[-\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) + \sin\left(\frac{3\pi}{4}k\right) \right] + \right. \\
 &\quad \left. + \frac{2}{\pi k} \left[\sin\left(\frac{3\pi}{4}k\right) - \sin\left(\frac{\pi}{2}k\right) \right] + \frac{-4}{\pi k} \left[\sin(\pi k) - \sin\left(\frac{3\pi}{4}k\right) \right] \right) dx = \\
 &= \frac{1}{2} \left(\frac{-8}{\pi k} \sin(\pi k) + \frac{-4}{\pi k} \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) + \frac{12}{\pi k} \sin\left(\frac{3\pi}{4}k\right) \right)
 \end{aligned}$$

Használjuk fel az alábbiakat:

$$\begin{aligned}
 &- \sin(\pi k) = 0 \text{ bármely egész } k \text{ esetén,} \\
 &- \sin\left(\frac{\pi k}{2}\right) = \begin{cases} 1 & \text{ha } k = 4m + 1 \ (m \in \mathbb{Z}), \\ -1 & \text{ha } k = 4m + 3 \ (m \in \mathbb{Z}), \\ 0 & \text{ha } k = 2m \ (m \in \mathbb{Z}). \end{cases} \\
 &- \sin\left(\frac{3\pi}{4}k\right) = \begin{cases} -1 & \text{ha } k = 4m + 1 \ (m \in \mathbb{Z}), \\ 1 & \text{ha } k = 4m + 3 \ (m \in \mathbb{Z}), \\ 0 & \text{ha } k = 2m \ (m \in \mathbb{Z}). \end{cases}
 \end{aligned}$$

Ezek alapján

$$a_k = \begin{cases} \frac{1}{2} \left(\frac{-4}{\pi k} - \frac{12}{\pi k} \right) = \frac{-8}{\pi k} & \text{ha } k = 4m + 1 \ (m \in \mathbb{Z}), \\ \frac{1}{2} \left(\frac{4}{\pi k} + \frac{12}{\pi k} \right) = \frac{8}{\pi k} & \text{ha } k = 4m + 3 \ (m \in \mathbb{Z}), \\ 0 & \text{ha } k = 2m \ (m \in \mathbb{Z}). \end{cases}$$

6. Tekintsük azt az $f : [0,2] \rightarrow \mathbb{R}$ függvényt, mely az alábbi módon van definiálva:

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{ha } x \in \left[0, \frac{1}{2}\right], \\ -1 & \text{ha } x \in \left(\frac{1}{2}, 1\right], \\ 0 & \text{ha } x \in (1,2], \end{cases}$$

Terjesszük ki ezt a függvényt úgy, hogy minden $x \in \mathbb{R}$ esetén értelmezve legyen, és Fourier sora tisztán szinuszos legyen! Számítsuk is ki ezt a Fourier sort!

Megoldás: Mivel tisztán szinuszos Fourier sort szeretnénk, így páratlan függvénné kell kiterjesztenünk. Így legyen a kiterjesztés a $[-2, 2]$ halmazon

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{ha } x \in \left[0, \frac{1}{2}\right] \cup \left[-1, -\frac{1}{2}\right), \\ -1 & \text{ha } x \in \left(\frac{1}{2}, 1\right] \cup \left[-\frac{1}{2}, 0\right), \\ 0 & \text{máshol,} \end{cases}$$

és $f(x) = f(x + 4)$.

Ekkor az együtthatók

$$a_0 = \frac{1}{4} \left(\int_0^{1/2} 1 dx + \int_{-1}^{-1/2} 1 dx + \int_{1/2}^1 (-1) dx + \int_{-1/2}^0 (-1) dx \right) = \frac{1}{4} (1 + (-1)) = 0,$$

$a_k = 0$ és

$$\begin{aligned} b_k &= \frac{2}{4} \int_{-2}^2 f(x) \sin\left(\frac{2\pi k}{4}x\right) dx = \\ &= \frac{1}{2} \left(\int_0^{1/2} \sin\left(\frac{\pi k}{2}x\right) dx + \int_{-1}^{-1/2} \sin\left(\frac{\pi k}{2}x\right) dx + \right. \\ &\quad \left. \int_{1/2}^1 (-1) \sin\left(\frac{\pi k}{2}x\right) dx + \int_{-1/2}^0 (-1) \sin\left(\frac{\pi k}{2}x\right) dx \right) = \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{-1}{\frac{\pi k}{2}} \left[\cos\left(\frac{\pi k}{2}x\right) \right]_0^{1/2} + \frac{-1}{\frac{\pi k}{2}} \left[\cos\left(\frac{\pi k}{2}x\right) \right]_{-1}^{-1/2} + \right. \\ &\quad \left. \frac{1}{\frac{\pi k}{2}} \left[\cos\left(\frac{\pi k}{2}x\right) \right]_{1/2}^1 + \frac{1}{\frac{\pi k}{2}} \left[\cos\left(\frac{\pi k}{2}x\right) \right]_{-1/2}^0 \right) = \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{-2}{\pi k} \left[\cos\left(\frac{\pi k}{4}\right) - \cos(0) \right] + \frac{-2}{\pi k} \left[\cos\left(-\frac{\pi k}{4}\right) - \cos\left(-\frac{\pi k}{2}\right) \right] + \right. \\ &\quad \left. \frac{2}{\pi k} \left[\cos\left(\frac{\pi k}{2}\right) - \cos\left(\frac{\pi k}{4}\right) \right] + \frac{2}{\pi k} \left[\cos(0) - \cos\left(-\frac{\pi k}{4}\right) \right] \right) = \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{-2}{\pi k} \left[\cos\left(\frac{\pi k}{4}\right) - 1 \right] + \frac{-2}{\pi k} \left[\cos\left(\frac{\pi k}{4}\right) - \cos\left(\frac{\pi k}{2}\right) \right] + \right. \\ &\quad \left. \frac{2}{\pi k} \left[\cos\left(\frac{\pi k}{2}\right) - \cos\left(\frac{\pi k}{4}\right) \right] + \frac{2}{\pi k} \left[1 - \cos\left(\frac{\pi k}{4}\right) \right] \right) = \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{4}{\pi k} + \frac{-8}{\pi k} \cos\left(\frac{\pi k}{4}\right) + \frac{4}{\pi k} \cos\left(\frac{\pi k}{2}\right) \right) \end{aligned}$$

Használjuk fel az alábbiakat:

$$-\cos\left(\frac{\pi k}{4}\right) = \begin{cases} \frac{\sqrt{2}}{2} & \text{ha } k = 8m + 1 \text{ vagy } k = 8m + 7 \ (m \in \mathbb{Z}), \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & \text{ha } k = 8m + 3 \text{ vagy } k = 8m + 5 \ (m \in \mathbb{Z}), \\ 0 & \text{ha } k = 8m + 2 \text{ vagy } k = 8m + 6 \ (m \in \mathbb{Z}), \\ 1 & \text{ha } k = 8m \ (m \in \mathbb{Z}), \\ -1 & \text{ha } k = 8m + 4 \ (m \in \mathbb{Z}), \end{cases}$$

$$-\cos\left(\frac{\pi k}{2}\right) = \begin{cases} 1 & \text{ha } k = 4m \ (m \in \mathbb{Z}), \\ 0 & \text{ha } k = 4m + 1 \text{ vagy } k = 4m + 3 \ (m \in \mathbb{Z}), \\ -1 & \text{ha } k = 4m + 2 \ (m \in \mathbb{Z}). \end{cases}$$

Így tehát

$$a_k = \begin{cases} \frac{1}{2} \left(\frac{4}{\pi k} + \frac{-8\sqrt{2}}{\pi k} \frac{1}{2} \right) = \frac{2(1-\sqrt{2})}{\pi k} & \text{ha } k = 8m + 1 \ (m \in \mathbb{Z}), \\ \frac{1}{2} \left(\frac{4}{\pi k} - \frac{4}{\pi k} \right) = 0 & \text{ha } k = 8m + 2 \ (m \in \mathbb{Z}), \\ \frac{1}{2} \left(\frac{4}{\pi k} - \frac{-8\sqrt{2}}{\pi k} \frac{1}{2} \right) = \frac{2(1+\sqrt{2})}{\pi k} & \text{ha } k = 8m + 3 \ (m \in \mathbb{Z}), \\ \frac{1}{2} \left(\frac{4}{\pi k} - \frac{-8}{\pi k} + \frac{4}{\pi k} \right) = \frac{8}{\pi k} & \text{ha } k = 8m + 4 \ (m \in \mathbb{Z}), \\ \frac{1}{2} \left(\frac{4}{\pi k} - \frac{-8\sqrt{2}}{\pi k} \frac{1}{2} \right) = \frac{2(1+\sqrt{2})}{\pi k} & \text{ha } k = 8m + 5 \ (m \in \mathbb{Z}), \\ \frac{1}{2} \left(\frac{4}{\pi k} - \frac{4}{\pi k} \right) = 0 & \text{ha } k = 8m + 6 \ (m \in \mathbb{Z}), \\ \frac{1}{2} \left(\frac{4}{\pi k} + \frac{-8\sqrt{2}}{\pi k} \frac{1}{2} \right) = \frac{2(1-\sqrt{2})}{\pi k} & \text{ha } k = 8m + 7 \ (m \in \mathbb{Z}), \\ \frac{1}{2} \left(\frac{4}{\pi k} + \frac{-8}{\pi k} + \frac{4}{\pi k} \right) = 0 & \text{ha } k = 8m \ (m \in \mathbb{Z}). \end{cases}$$