Matek G1

Gyakorlati anyagok

1-2. gyakorlat: Numerikus sorozatok

A feladatok a Monostory példatár I. kötetéből vannak.

1. **Küszöbindexes példák:** Adjuk meg $N(\varepsilon)$-t minden esetben (maga a határérték nem elegendő)!

   a) 110.

   b) 111.

   c) 113.

   d) 117.

   e) 118.

   f) $a_n = \dfrac{n^2 - 3n + 1}{n^3 + 7n + 2}$

2. **További határértékek:** Elegendő a határérték megadása!

   a) 121.

   b) 128.

   c) 132.

   d) $a_n = \dfrac{2^{2n} + 3^{n-1} + 1}{4^{n-1} + 2^{n+1}}$

   e) $a_n = \dfrac{(-2)^n + 3}{5 + 7^n}$

   f) $a_n = \dfrac{3^{2n}}{3^n + 9^n}$

   g) Opcionális: adjuk meg az $a_n = (-1)^n + \left(\dfrac{1}{n}\right)^n$ sorozat szuprémumát, infimumát, $\limsup$-ját és $\liminf$-jét!

3. **Rendőr elv:** Csak indoklással fogadjuk el a határértéket!

   a) 162.

   b) $a_n = \sqrt[n]{2n^3 + 3}$

   c) $a_n = \sqrt[n]{\dfrac{2n^2 + 3}{4n^2 + n}}$

4. $\boldsymbol{\lim\limits_{n\to\infty} \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n = e}$ **állítást használó feladatok:**

   a) $a_n = \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^{2n}$

   b) $a_n = \left(1 + \dfrac{1}{3n}\right)^{n}$

   c) $a_n = \left(1 + \dfrac{2}{n}\right)^{n}$

   d) $a_n = \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^{2n+3}$

e) $a_n = \left(1 + \frac{1}{2^n - 1}\right)^{2^{n+2}+3}$

5. **Összefoglaló példa:** (opcionális)

$$a_n = 3\sqrt[n]{5n} - \sin(n^2)\frac{1}{n^3+2} + \frac{6n^4+n+1}{2n^4+n^2+2} + \left(1 + \frac{1}{2n}\right)^n \frac{2^{n-1}+4^{n+1}}{5^n}$$

3-4. gyakorlat: Függvények és határértékeik

A feladatok a Monostory példatár I. kötetéből vannak.

1. **Középiskolás ismétlés:** Ábrázolja az alábbi függvényeket!

   a) $f(x) = 2x^2 - 8x + 9$

   b) $g(x) = \dfrac{2x+3}{x-1}$ (opcionális)

   c) $h(x) = \operatorname{sgn}(x)\sin(x)\operatorname{sgn}(\sin(x)) - |\sin(x)|$ (opcionális, de a 353-hoz majd kelleni fog az ábra)

   d) 268. (a polinomosztást itt kell elmondani!)

2. **Függvények határértékei: adott pontba tartó sorozat**

   a) 337. (Lehet konkrét n pl. $n = 3$ esetén megoldani, és utána az általános esetet elmondani.)

   b) 338.

   c) 348. (a)

   d) 350. (a)

   e) 351. (a)

   f) 353.

   g) 367. (b)

   h) 368. (b)

3. **Függvények határértékei: egyszerűsítéses módszer**

   a) 369.

   b) 373.

   c) 375.

   d) 376.

4. **Függvények határértékei: végtelenbe tartó argumentum**

   a) 382.

   b) 383.

   c) 384.

5. **Függvények határértékei: "gyöktelenítéses"**

   a) 388.

   b) 401.

6. **Függvények határértékei:** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin(x)}{x} = 1$

   a) 403.

   b) 405. (Lehet először $a = 3$ és $b = 7$ értékekkel megoldani, aztán az általános esetet megemlíteni.)

   c) 406.

   d) 409. (Használjuk a $2\sin^2(\alpha) = 1 - \cos(2\alpha)$ összefüggést!)

   e) 412. (Használjuk az előző, vagy a $\sin^2(x) = 1 - \cos^2(x)$ összefüggést!)

   f) 418.

   g) 437.

7. **Folytonosság vizsgálata**

a) Folytonossá tehető-e az alábbi függvény az origóban? Ha igen, határozza meg c értékét úgy, hogy a függvény folytonos legyen!

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\operatorname{tg}(x)}{x} & \text{ha } x \in \left[-\dfrac{\pi}{4}, \dfrac{\pi}{4}\right] \setminus \{0\}, \\ c & \text{ha } x = 0. \end{cases}$$

b) Folytonossá tehető-e az alábbi függvény az $x = 2$ vagy az $x = 3$ pontokban? Ha igen, határozza meg a és b értékét úgy, hogy a függvény folytonos legyen az adott pontban!

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 - 7x + 10}{x^2 - 5x + 6} & \text{ha } x \neq 2, x \neq 3, \\ a & \text{ha } x = 2, \\ b & \text{ha } x = 3. \end{cases}$$

c) Folytonossá tehető-e az alábbi függvény az $x = 0$ vagy az $x = -3$ pontokban? Ha igen, határozza meg a és b értékét úgy, hogy a függvény folytonos legyen az adott pontban!

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^3 + x^2 - 5x + 3}{x^2(x+3)} & \text{ha } x \neq 0, x \neq -3, \\ a & \text{ha } x = 0, \\ b & \text{ha } x = -3. \end{cases}$$

d) Folytonossá tehető-e az alábbi függvény az $x = 1$ vagy az $x = 10$ pontokban? Ha igen, határozza meg a és b értékét úgy, hogy a függvény folytonos legyen az adott pontban!

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 - 10x}{x^2 - 11x + 10} & \text{ha } x \neq 1, x \neq 10, \\ a & \text{ha } x = 1, \\ b & \text{ha } x = 10. \end{cases}$$

8. **Trigonometrikus függvények inverzei:** Előadáson szerepelni fognak, de a rajzaik gyakorlaton is szerepelhetnek! (arcsin, arccos, arctan)

   Opcionális feladatok ezekhez: 555. (a), 557. (d)

9. **Hiperbolikus függvények és inverzeik:** Előadáson szerepelni fognak, de a rajzaik gyakorlaton is szerepelhetnek! (sh, ch, th, cth, arsh, arch, arth, arcth)

   Opcionális feladatok ezekhez: 687. (c), 688. (d)

5. gyakorlat: Deriválás

A feladatok a Monostory példatár I. kötetéből vannak.

1. **Deriválási szabályok gyakorlása**

   a) 745.

   b) 748.

   c) 751.

   d) 762.

   e) 773.

2. **Implicit függvény deriválása**

   a) 811.

   b) Adja meg az $x^2 - xy + y^3 = 3$ egyenlet által leírt görbe deriváltját általánosan, valamint számítsa ki ezt az $y(2) = 0$ pontban!

3. **Érintő egyenlete:**

   a) 816.

   b) 819.

   c) 823.

Eddig tart az első ZH anyaga!

6. gyakorlat: l'Hospital szabály, elmaradások pótlása

A feladatok a Monostory példatár I. kötetéből vannak.

1. **L'Hospital szabály:**

   a) 896.

   b) 897.

   c) 898.

   d) 899.

   e) 901.

   f) 912.

   g) 916.

   h) 920. (opcionális, nehezebb példa)

7. gyakorlat: Függvényvizsgálat

Adja meg az alábbi függvények értelmezési tartományait, monotonitási tartományait, szélsőértékeit, valamint a konvexitási tartományokat és az inflexiós pontokat! A válaszokat csak táblázatos formában fogadjuk el!

1. $f(x) = x^3 - x^2 - 2x$
2. $f(x) = (x+1)e^{2x}$
3. $f(x) = (x^2 - 1)e^x$
4. $f(x) = \dfrac{x}{x^2 - 1}$
5. $f(x) = \dfrac{\arcsin(x)}{\sqrt{1 - x^2}}$
6. (opcionális)
$$f(x) = \begin{cases} |x^2 - 4x + 3| & \text{ha } x > 0, \\ 0 & \text{ha } x = 0, \\ 3 + e^x & \text{ha } x < 0. \end{cases}$$
7. (opcionális) $f(x) = e^{e/x} - x$
8. Opcionális: az egyik fenti függvény esetén végezzünk teljes függvényvizsgálatot (a fenti lépéseken kívül: zérushelyek, előjelvizsgálat, határértékek a $\pm\infty$-ben és az esetleges szakadási pontokban, aszimptoták, a függvény vázlatos ábrája, értékkészlet).

8. gyakorlat: Paraméteresen adott görbék

A feladatok a Monostory példatár I. kötetéből vannak.

1. 1039. (opcionális)
2. 1071.
3. 1073.
4. 1053. (opcionális)
5. 1056. (opcionális)
6. 1063. (opcionális)
7. 1096. (Megemlíthető, hogy ez az előadáson szereplő, $r = a\sqrt{2}\sqrt{\cos(2\varphi)}$ egyenletű lemniszkáta egyenlete $a = \sqrt{2}$ esetén. A feladat végén megmutatható, hogy a görbe rajzáról a válasz számolás nélkül is leolvasható.)
8. 1100.

9-10. gyakorlat: Határozatlan integrálás

A feladatok a Monostory példatár I. kötetéből vannak.

1. **"Egyszerűbb" integrálok:**
   - *a)* 1141.
   - *b)* 1142.
   - *c)* 1147.
2. **Szabály:** $\int (f(x))^n f'(x)\, dx = \frac{(f(x))^{n+1}}{n+1} + c$
   - *a)* 1159.
   - *b)* 1164.
3. **Szabály:** $\int \frac{f'(x)}{f(x)}\, dx = \ln(|f(x)|) + c$ ahol $f(x) \neq 0$
   - *a)* 1170.
   - *b)* 1168.
4. **Szabály:** $\int f'(g(x))g'(x)\, dx = f(g(x)) + c$
   - *a)* 1176.
5. **Nevezetes trigonometrikus deriváltak felismerése**
   - *a)* 1181.
   - *b)* 1180.
   - *c)* 1183.
6. **Trigonometrikus függvények:**
   - *a)* $\int \sin^2(x)dx$ (Használjuk a $2\sin^2(\alpha) = 1 - \cos(2\alpha)$ összefüggést!)
   - *b)* $\int \sin^3(x)dx$ (Használjuk a $\sin^2(x) + \cos^2(x) = 1$ összefüggést!)
   - *c)* $\int \sin^2(5x)dx$ (opcionális)
   - *d)* $\int \sin^5(2x)dx$ (opcionális)
   - *e)* $\int \sin^4(2x)dx$ (opcionális)
   - *f)* 1194.
7. **Parciális integrálás:**
   - *a)* $\int x\sin(x)dx$
   - *b)* $\int x\sin(2x)dx$
   - *c)* $\int x^2\sin(x)dx$
   - *d)* $\int x\sin(2x-1)dx$ (opcionális)
   - *e)* $\int (4x+1)\sin(2x-1)dx$
   - *f)* $\int \ln(x+1)dx$

g) $\int \operatorname{arch}(x)dx$ (opcionális)

8. **Racionális törtfüggvények:**

   a) $\int \frac{1}{x^2-6x+8}dx$

   b) $\int \frac{x^2-x+1}{x^2+x}dx$

   c) 1228.

   d) 1231. (opcionális)

9. **Helyettesítéses integrálás:**

   a) 1236.

   b) 1261.

Eddig tart a második ZH anyaga!

11. gyakorlat: Határozott integrálás és alkalmazásai

A feladatok a Monostory példatár I. kötetéből vannak.

1. **Határozott integrálás:**

   a) 1301. (A határozatlan rész már szerepelt előző gyakorlaton.)

   b) $\displaystyle\int_1^2 x\ln(x)dx$

   c) Számítsuk ki az $f(x) = xe^{4x}$ függvény [0,3] intervallumon vett íve és az x tengely közötti síkidom területét!

   d) 1310.

2. **Alkalmazások:**

   a) 1347.

   b) 1359.

   c) 1403. (opcionális)

   d) 1412. (opcionális)

12. gyakorlat: Komplex számok

A feladatok a Monostory példatár III. kötetéből vannak.

1. **Algebrai alak:**

   a) 175. (a)

   b) 175. (e)

   c) 175. (g)

   d) 177. (c)

   e) 179. (a) (opcionális)

   f) 180. (a)

   g) 181. (a)

   h) 182. (a) (Elegendő csak elkezdeni, hogy lássák, a gyökvonás nem megy algebraiban, vagy legalábbis nehéz.)

2. **Trigonometrikus alak:**

   a) 183. (a) (opcionális)

   b) 183. (b) (opcionális)

   c) 183. (c) (opcionális)

   d) 184. (a), (c), (d), (e), (k), (j)

   e) 186. (c)

   f) 187. (a)

   g) 187. (b) (opcionális)

   h) 187. (d) (opcionális)

   i) 190. (c)

   j) Oldjuk meg az alábbi egyenletet a komplex számok körében!

$$(i\sqrt{2} - \sqrt{2})z^3 = (1+i)^5$$

3. **Polinomok**

   a) 222. (c)

   b) 221. (g)

   c) Írjuk fel azt a legkisebb fokú normálpolinomot, melynek i kétszeres, $-1-i$ egyszeres, 2 pedig háromszoros gyöke!

   d) Írjuk fel azt a legkisebb fokú valós együtthatós normálpolinomot, melynek i kétszeres, $-1-i$ egyszeres, 2 pedig háromszoros gyöke!