Mintaszigorlat

Matematika G szigorlat

Minden feladat 20 pontot ér.

Ha az 1. feladat egyenletét nem tudja a hallgató megoldani, lehetősége van csupán a függvényvizsgálati részre pontot kapnia, de ezt a feladatlapján egyértelműen jelölnie kell (mindkettőre nem kaphat pontot). Ha az alternatívát választja, akkor az egész első feladatra maximum 5 pont adható.

A második feladat vagy egy Fourier soros példa, vagy egy feltételes szélsőértékes feladat. A feladatsoron csak az egyik fog szerepelni, de különböző szigorlati alkalmakon ezek közül valamelyik fog szerepelni a feladatlapon.

A szigorlat ponthatárai: 40 ponttól kettes, 55 ponttól hármas, 70 ponttól négyes és 85 ponttól ötös.

1. **Elsőrendű differenciálegyenlet megoldása és a megoldás szélsőértékének keresése**

   a) (6. gyakorlat 2. a) feladat) Adjuk meg az alábbi differenciálegyenlet $y(0) = 1$ kezdeti feltételt kielégítő megoldását! (15 pont)

   $$y'(x) = (y(x))^2 x^3.$$

   b) Határozzuk meg a megoldásfüggvény lokális szélsőértékeit! (5 pont)

   Alteratíva: Keressük meg az alábbi függvény szélsőértékét:

   $$f(x) = \frac{1}{-\frac{x^2}{2} + 3}.$$

   (Az alternatíva megoldása esetén a feladatra maximum 5 pont kapható!)

Megoldás:

b) A megoldás

$$y(x) = \frac{1}{-\frac{x^4}{4} + 1}.$$

Ennek deriváltja

$$y'(x) = \frac{-1}{\left(-\frac{x^4}{4} + 1\right)^2}(-x^3),$$

(1 pont) ami ott nulla, ahol $x = 0$. (1 pont) Látható, hogy jelen esetben ha $x \in (-c,0)$ akkor $y'(x) < 0$ azaz itt $y(x)$ csökken, és ha $x \in (0, c)$ akkor pedig $y'(x) > 0$ azaz itt $y(x)$ növekszik. Ezért $x = 0$-ban az $y(x)$ függvénynek minimuma van. (3 pont)

(Jelen feladat az alternatívában bemutatott módszerrel nem megoldható, de a szigorlaton olyan példa lesz, amely mindkét módszerrel megoldható.)

Az alternatíva megoldása: A függvény deriváltja

$$f'(x) = \frac{-1}{\left(-\frac{x^2}{2} + 3\right)^2}(-x),$$

(1 pont) ami ott nulla, ahol $x = 0$. (1 pont) A második derivált

$$y''(x) = \frac{\left(-\frac{x^2}{2} + 3\right)^2 - (-x)2\left(-\frac{x^2}{2} + 3\right)(-x)}{\left(-\frac{x^2}{2} + 3\right)^4}.$$

(1 pont) Ennek az értéke az $x = 0$ pontban $y''(0) = 1/9 > 0$, azaz a függvénynek itt minimuma van. (2 pont) (A feladat megoldható a monotonitás vizsgálatával is.)

2. **Fourier sorok**

(Fourier sorok feladatsor 5. feladat) Tekintsük azt az $f : [0,2] \to \mathbb{R}$ függvényt, mely az alábbi módon van definiálva:

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{ha } x \in [0,1]\,, \\ 1 & \text{ha } x \in \left(1, \dfrac{3}{2}\right], \\ -2 & \text{ha } x \in \left(\dfrac{3}{2}, 2\right], \end{cases}$$

Terjesszük ki ezt a függvényt úgy, hogy minden $x \in \mathbb{R}$ esetén értelmezve legyen, és Fourier sora tisztán koszinuszos legyen! Számítsuk is ki ezt a Fourier sort!

VAGY

Feltételes szélsőérték keresése

(Feltételes szélsőérték feladatsor 5. feladat) Keressük az alábbi függvény szélsőértékeit az $(x-1)^2 + y^2 \leq 1$ egyenletű körlapon!

$$f(x,y) = x^2 - y^2 + 3x - 1$$

3. **Vonalintegrál**

(3. gyakorlat 1. f) és 5. feladat) Számítsuk ki a $v(x,y,z) = (2xyz, x^2z, x^2y)$ vektormező integrálját a $z = 3$ síkban fekvő $x^2 + y^2 = 1$ körnek az $A(1,0,3)$ és $B\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 3\right)$ pontok közötti íve mentén!

4. **Felületi integrál**

(4. gyakorlat 2. és 5. gyakorlat 1. feladat) Számítsuk ki a $v(x,y,z) = (2x, 2y, 2z)$ vektormezőnek a

$$V = \left\{(x,y,z) : x^2 + y^2 \leq 1,\ z = 1 - \sqrt{x^2 + y^2}\right\}$$

felületen vett felületi integrálját a z tengelytől távolodó irányban!

5. **Inhomogén differenciálegyenlet-rendszer**

(11. gyakorlat 1. feladat) Oldjuk meg az alábbi egyenletrendszert!

$$\begin{cases} x'(t) = y(t) + 2e^t, \\ y'(t) = x(t) + z(t) + t^2, \\ z'(t) = y(t) + t. \end{cases}$$