Matematika G1 Mintavizsga

Javítva 2023. június 9-én.

Név és Neptun kód:

Elmélet	1.	2.	3.	4.	5.	Vizsga	Hozott	$\sum$	Jegy

Elméleti kérdések

Írjon 'I' betűt ha igaz, illetve 'H' betűt ha hamis az alábbi állítás a lap alján található táblázatba. A helyes válaszért +2 pont, kitöltetlen helyért 0 pont és hibás válaszért -2 pont jár.

1. (21.) Ha egy sorozat korlátos, akkor konvergens.
2. (76.) Ha a_n konvergens valós sorozat és b_n valós sorozatra $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = 0$, akkor $a_n \cdot b_n \to 0$.
3. (107.) Egy valós sorozat infimuma a sorozat legnagyobb alsó korlátja.
4. (146.) Egy $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvény páratlan, ha $f(x) = f(-x)$ teljesül minden $x \in \mathrm{Dom}(f)$ esetén.
5. (185.) Tekintsünk egy $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ folytonos függvényt. Ekkor ha $a \cdot b < 0$, akkor létezik egy olyan $c \in (a, b)$ érték, amelyre $f(c) = 0$.
6. (200.) Egy $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvény egy adott $a \in \mathbb{R}$ pontban pontosan akkor deriválható, ha folytonos is.
7. (248.) Egy $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, négyszer deriválható függvény $x_0 = 1$ körüli, harmadfokú Taylor polinomjának alakja az $x = b$ pontban
$$f(1) + f'(1)(b-1) + \frac{f''(1)}{2}(b-1)^2 + \frac{f'''(1)}{3}(b-1)^3.$$
8. (277.) Ha egy $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ függvény monoton, akkor Riemann integrálható.
9. (306.) $z = 3 - 2i$ komplex szám képzetes része $-2i$.
10. (327.) Minden komplex együtthatós, legalább elsőfokú polinomnak van legalább egy komplex gyöke.

1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.	9.	10.

Gyakorlati példák

Minden példa 8 pontot ér. Kérjük, hogy a példákat úgy oldja meg, hogy azok megoldásai jól elkülöníthetők legyenek egymástól.

1. Számítsa ki a következő sorozat határértékét! Válaszának minden lépését indokolja!

$$a_n = \frac{n^2+3n+5}{n^3+2n^2+1}\cos(n^3+n) + \sqrt[n]{\frac{3n^2+1}{n^2+2}}$$

Megoldás: Vizsgáljuk a két tagot külön-külön!

Az első tagban

$$\frac{n^2+3n+5}{n^3+2n^2+1} = \frac{n^3(\frac{1}{n}+\frac{3}{n^2}+\frac{5}{n^3})}{n^3(1+\frac{2}{n}+\frac{1}{n^3})} = \frac{\frac{1}{n}+\frac{3}{n^2}+\frac{5}{n^3}}{1+\frac{2}{n}+\frac{1}{n^3}} \to \frac{0+0+0}{1+0+0} = 0$$

(2 pont) Mivel $\cos(n^3+n)$ korlátos és nullába tartóval van szorozva, ezért

$$\frac{2^{2n}+5^n}{3^{2n}}\cos(n^2+1) \to 0.$$

(2 pont)

A második tagot rendőr elvvel vizsgáljuk:

$$\sqrt[n]{\frac{3n^2+1}{n^2+2}} \le \sqrt[n]{\frac{3n^2+n^2}{n^2}} = \sqrt[n]{4} \to 1, \qquad \text{(1,5 pont)}$$

$$\sqrt[n]{\frac{3n^2+1}{n^2+2}} \ge \sqrt[n]{\frac{3n^2}{n^2+2n^2}} \ge \sqrt[n]{1} \to 1, \qquad \text{(1,5 pont)}$$

így a rendőr elv alapján $\sqrt[n]{\frac{3n^2+1}{n^2+2}} \to 1$. (1 pont)

Tehát így végül $a_n \to 0+1 = 1$.

2. Tekintsük a következő függvényt:

$$f(x) = \begin{cases} -x^2+5 & \text{for } x<1, \\ 5 & \text{ha } x=1, \\ cx+2 & \text{ha } 1<x\le 3, \\ \dfrac{x-2}{x^2-9} & \text{ha } x>3. \end{cases}$$

Hogyan válasszuk a c paraméter értékét, hogy az $x=1$ pontban egy

(a) megszüntethető szakadást, vagy

(b) egy ugrást

kapjunk? Mit mondhatunk az $x=3$ pontban a függvény folytonosságáról?

Megoldás: Az $x=1$ pontban:

$$\lim_{x\to 1-0} f(x) = \lim_{x\to 1-0} -x^2+5 = 4 \qquad \text{(1 pont)},$$

$$\lim_{x\to 1+0} f(x) = \lim_{x\to 1+0} cx+2 = c+2 \qquad \text{(1 pont)},$$

Így a szakadás megszüntethető $c+2=4$ esetén, azaz ha $c=2$ (1 pont), és egy ugrást kapunk, ha $c+2=5$ azaz ha $c=3$ (1 pont). Az $x=3$ pontban:

$$\lim_{x\to 3-0} f(x) = \lim_{x\to 3-0} cx+2 = 3c+2 \qquad \text{(1,5 pont)},$$

$$\lim_{x\to 3+0} f(x) = \lim_{x\to 3+0} \frac{x-2}{x^2-9} = \frac{1}{+0} = +\infty \qquad \text{(1,5 pont)},$$

tehát itt egy másodfajú szakadása van a függvénynek. (1 pont)

3. Határozza meg az alábbi függvény konvexitási intervallumait, valamint az esetleges inflexiós pontjait! A választ csak táblázatos formában fogadjuk el!

$$f(x) = x^2 e^{2x}$$

Megoldás: Szükségünk lesz a második deriváltra:

$$f'(x) = 2xe^{2x} + x^2 2e^{2x},$$

$$f''(x) = (2xe^{2x} + x^2 2e^{2x})' = 2e^{2x} + 4xe^{2x} + 2x2e^{2x} + x^2 4e^x = 2e^x(2x^2 + 4x + 1)$$

(2 pont) Ennek zérushelyei $-1 \pm \sqrt{2}/2$ (1 pont), így a táblázat:

x	$(-\infty, -1 - \frac{\sqrt{2}}{2})$	$-1 - \frac{\sqrt{2}}{2}$	$(-1 - \frac{\sqrt{2}}{2}, -1 + \frac{\sqrt{2}}{2})$	$-1 + \frac{\sqrt{2}}{2}$	$(-1 + \frac{\sqrt{2}}{2}, \infty)$
$f''(x)$	pozitív	0	negatív	0	pozitív
$f(x)$	konvex	infl. p.	konkáv	infl. p.	konvex

(oszloponként 1 pont)

4. Határozza meg az alábbi függvény [2,3] intervallum feletti grafikonja és az x tengely által közrezárt síkidom területét!

$$f(x) = \frac{2}{x^2 + x - 2}$$

Megoldás: A kérdéses terület $\int_2^3 \frac{2}{x^2 + x - 2} dx$. (1 pont) Bontsuk parciálisan törtekre a függvényt! Mivel $(x-1)(x+2) = x^2 + x - 2$ (1 pont), ezért

$$\frac{2}{x^2 + x - 2} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+2} = \frac{A(x+2) + B(x-1)}{x^2 + x - 2}$$

(1 pont) Az $2 = A(x+2) + B(x-1)$ egyenletből

$$A + B = 0,$$

$$2A - B = 2.$$

Ezekből $A = 2/3$ és $B = -2/3$ (2 pont), így

$$\int \frac{2}{x^2 + x - 2} dx = \int \frac{2/3}{x-1} + \frac{-2/3}{x+2} dx = \frac{2}{3}\ln(|x-1|) - \frac{2}{3}\ln(|x+2|) + c,$$

(2 pont) azaz így a végeredmény:

$$\int_2^3 \frac{2}{x^2 + x - 2} dx = \left[\frac{2}{3}\ln(|x-1|) - \frac{2}{3}\ln(|x+2|)\right]_2^3 = \frac{2}{3}\ln(2) - \frac{2}{3}\ln(5) - (\frac{2}{3}\ln(1) - \frac{2}{3}\ln(3)) =$$

$$= \frac{2}{3}(\ln(2) - \ln(5) + \ln(3)).$$

(1 pont)

5. Adjuk meg az alábbi egyenlet összes (komplex) megoldását!

$$iz^3 = \frac{1}{2}(1-i)^8$$

Megoldás: Először trigonometrikus alakot használva végezzük el a hatványozást:

$$(1-i)^8 = \left(\sqrt{2}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right)\right)^8 = 2^4\left(\cos(-2\pi) + i\sin(-2\pi)\right) =$$

$$= 2^4\left(\cos(0) + i\sin(0)\right) = 16.$$

(2 pont) Így az egyenlet egyszerűbb alakja:

$$iz^3 = \frac{16}{2},$$

azaz a megoldandó egyenlet

$$z^3 = \frac{8}{i},$$

de ismert, hogy $\frac{1}{i} = -i$ azaz így

$$z^3 = -8i.$$

(2 pont)

A gyökvonáshoz használjuk a trigonometrikus alakot:

$$-8i = 8\left(\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right),$$

azaz így

$$z = \sqrt[3]{-8i} = 2\left(\cos\left(\frac{-\frac{\pi}{2} + k2\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{-\frac{\pi}{2} + k2\pi}{3}\right)\right), \qquad k = 0{,}1{,}2.$$

(1 pont)

Ha $k = 0$:

$$z_1 = 2\left(\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right).$$

Ha $k = 1$:

$$z_2 = 2\left(\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)\right).$$

Ha $k = 2$:

$$z_3 = 2\left(\cos\left(\frac{7\pi}{6}\right) + i\sin\left(\frac{7\pi}{6}\right)\right).$$

(megoldásonként 1-1 pont)