

2. Mintazárthelyi

Alkalmazott analízis 1, Matematika BSc

Kérem, hogy **minden lapra** írd fel a **nevedet** és **Neptun kódodat**! Ha a dolgozatot befejezted, hosszában hajtsd félbe a lapokat, és azokat egymásba csúsztatva add be!

A dolgozat tartalmaz papírom megoldandó, illetve programozási feladatokat is, utóbbiakhoz a MATLAB beépített help parancsa (az adott parancsra kattintunk, majd F1-et nyomunk) használható, és ezeket \mathbb{P} jellel jelöltem.

1. (5. gyakorlat 2. feladat) Tekintsük az alábbi egyenletrendszert:

$$\begin{cases} 4x + 2y = 7, \\ 2x + 3y = 10. \end{cases}$$

Az origóból kiindulva lépünk kettőt a konjugált gradiens módszerrel! Mit tapasztalunk? (10 pont)

2. (6. gyakorlat 2. feladat) Tekintsük az alábbi mátrixot!

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 9 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

A Bauer-Fike tétel segítségével becsüljük meg, hogy mennyivel változhatnak ezen mátrix sajátértékei a végtelen (maximum) normában, ha a mátrix bal alsó eleme megnő 0.1-el! (10 pont)

3. \mathbb{P} (6. gyakorlat 4. feladat) Tekintsük az alábbi mátrixot:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Határozzuk meg a mátrix $\mu = 1$ értékhez legközelebbi sajátértékét az inverz iteráció segítségével legfeljebb $\varepsilon = 10^{-4}$ hibával! Legyen a kezdővektorunk $y_0 = \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ 5 \end{pmatrix}$. Mennyit kellett lépünk? (10 pont)

4. (7. gyakorlat 1. és 4. feladatai) Tekintsük az alábbi függvényt:

$$f(x) = x^3 + 2x^2 + 10x - 20$$

(a) \mathbb{P} Lássuk be, hogy a függvénynek van gyöke az $[1,2]$ intervallumon, majd keressük meg ezt a gyököt intervallumfelezés segítségével! A kódunk álljon le, amikor a vizsgált intervallum hossza már kisebb, mint 10^{-10} . (10 pont)

(b) Alkalmass F függvény választásával írjuk át az $f(x) = 0$ problémát fixpont-iterációs alakba! Lássuk be, hogy ezen iteráció valóban konvergálni fog! (7 pont)

(c) \mathbb{P} A (b) részben felírt iterációt programozzuk le, és futtassuk addig, amíg az egymás követő lépésekben kapott értékek eltérése már kisebb, mint 10^{-10} . (3 pont)

5. \mathbb{P} (8. gyakorlat 3. feladat) Tekintsük az alábbi egyenletrendszert:

$$\begin{cases} 5x^2 - y^2 & = 0, \\ y - 0.25(\sin x + \cos y) & = 0. \end{cases}$$

Newton módszer segítségével keressük ennek az $(x_0, y_0) = (0.25, 0.25)$ pont környezetében lévő megoldását! (10 pont)

6. (9. gyakorlat 1. feladat) Bizonyítsuk be, hogyha $f \in C^3$ (azaz f háromszor folytonosan deriválható), akkor

$$\frac{-3f(x_0) + 4f(x_0 + h) - f(x_0 + 2h)}{2h} = f'(x_0) + O(h^2).$$

(10 pont)

7. (9. gyakorlat 3. feladat) Tekintsük az alábbi integrált:

$$\int_0^2 \frac{1}{x^2 + 1} dx$$

Határozzuk meg ezt az integrált összetett trapéz, összetett érintő és összetett Simpson módszerek segítségével is, amikor a $[0, 2]$ tartományt felbontjuk kettő egyenlő hosszúságú, $[0, 1]$ és $[1, 2]$ tartományokra. (10 pont)