Mintazárthelyi

Alkalmazott analízis 1, Matematika BSc

Kérem, hogy **minden lapra** írd fel a **nevedet** és **Neptun kódodat**! Ha a dolgozatot befejezted, hosszában hajtsd félbe a lapokat, és azokat egymásba csúsztatva add be!
A dolgozat tartalmaz papírom megoldandó, illetve programozási feladatokat is, utóbbiakhoz a MATLAB beépített help parancsa (az adott parancsra kattintunk, majd F1-et nyomunk) használható, és ezeket $\mathbb{P}$ jellel jelöltem.

1. (1. gyakorlat 6. feladat) Tekintsük az alábbi integrált:

$$I_n = \int_0^1 \frac{x^n}{10+x} dx$$

ahol $n \in \mathbb{N}$.

(a) Igazoljuk, hogy $I_n \geq 0$, $I_{n+1} \leq I_n$, és ezek alapján $I_n \to 0$, ha $n \to 0$. (5 pont)

(b) Igazoljuk, hogy igaz az alábbi rekurzió!

$$I_n = \frac{1}{n} - 10 I_{n-1}.$$

Mennyi lesz I_0? (5 pont)

(c) $\mathbb{P}$ Írjunk programot, mely adott n-ig kiszámolja a rekurzió lépéseinek értékeit. Mit tapasztalunk nagy n értékek esetén? (10 pont)

2. (2. gyakorlat 5. feladat) $\mathbb{P}$ Állítsuk elő azt az $A \in \mathbb{R}^{32\times 32}$ mátrixot, melynek elemei az alábbi értékek:

$$a_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{ha } i = j, \\ -1, & \text{ha } i < j, \\ 0, & \text{egyébként.} \end{cases}$$

A lineáris egyenletrendszer jobboldali vektora $b = (-98, -97, \ldots, 0, 1)^T$. Perturbáljuk a vektort úgy, hogy annak utolsó eleme 1 helyett 1.0001 legyen! Az előadáson tanultak fényében döntsük el, hogy a lineáris algebrai egyenletrendszer rosszul kondícionált-e, vagy sem a mátrix kondíciószámának kiszámításával, melyet MATLAB segítségével végezhetünk el! Alkalmazzuk az előadáson tanult becslést! (10 pont)

3. (3. gyakorlat 3. feladat) Adjuk meg az alábbi mátrix Cholesky-felbontását! (Érdemes direkten kiszámítani!) (10 pont)

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 2 & 17 & 13/2 \\ 1 & 13/2 & 23/2 \end{bmatrix}$$

4. (4. gyakorlat 1. feladat) Tekintsük az alábbi egyenletrendszert:

$$\begin{bmatrix} 2 & c \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \overline{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

Mely c értékek esetén lehet alkalmazni ezen rendszerre a Jacobi, vagy a Gauss-Seidel iterációt? (Válasz: $|c| < 2$.) Adjunk meg egy olyan c értéket is, hogy a JOR iteráció konvergens legyen $\omega \in (0,1)$ esetén! (Válasz: $c = -1$ megfelelő.) (10 pont)

5. (4. gyakorlat 2. feladat) Tekintsük az alábbi egyenletrendszert:

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \overline{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

Írjuk fel az egyenletre alkalmazott JOR iteráció egy általános lépését! Mit mondhatunk, mely ω érték esetén lesz a leggyorsabb az iteráció? (10 pont)