Vektoranalízis

Nágel Árpád

V 1.02 – 2019. április 16.

Tartalomjegyzék

1. Első fejezet

1.1. Vektormező

E lecke befejezése után a hallgató:

- megismerkedik a vektormező fogalmával,
- ismeri és érti a vektormező határértékének és a folytonosságának fogalmát.

Vektormező

Definíció: Vektormező; vektor-vektor függvény
A $v(r)$ hozzárendelést **vektormezőnek** vagy **vektor-vektor függvénynek** nevezzük, ha {Fde:vektormezo}

$$v : H \subseteq \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 \tag{1}$$

Megjegyzés:
Vektormező például az erőtér, a sebességmező, az elektromos térerősség, hiszen ezek a tér egyes pontjaihoz egy vektort rendelnek, vagyis egy olyan mennyiséget, aminek nem csak nagysága, hanem iránya is van.

Vektormező pontbeli határértéke

Megjegyzés:
Tekintsünk egy $v : H \to \mathbb{R}^3$ vektormezőt, ahol a $H \subseteq \mathbb{R}^3$ halmaz tetszőleges. Jelöljük a $v(x)$ vektor koordinátáit $v_1(x), v_2(x), v_3(x)$-szel minden $x \in H$-ra. Ezzel definiáltuk a $v : H \to \mathbb{R}^3$ vektormező koordinátafüggvényeit. A v koordinátafüggvényei a H halmazon értelmezett valós értékű függvények. A függvény határértékét, folytonosságát és differenciálhatóságát definiálhatnánk a koordinátafüggvényeinek megfelelő tulajdonságain keresztül. A lényeget viszont jobban megragadja, ha a fenti fogalmakat közvetlenül v-re definiáljuk. Ez hasonlóan történik, mint azt a valós értékű függvények esetében már megtettük.

Definíció: Vektormező pontbeli határértéke
Legyen $H \subseteq E \subseteq \mathbb{R}^3$ és legyen a a H halmaz torlódási pontja. Azt mondjuk, hogy a $v : E \to \mathbb{R}^3$ **vektor-vektor függvény határértéke** a-ban a H halmazra szorítkozva a $b \in \mathbb{R}^3$ pont, ha minden $\epsilon > 0$-hoz van olyan $\delta > 0$, hogy minden $x \in H$, $0 < |x - a| < \delta$ esetén $|v(x) - b| < \epsilon$. Ezt $\lim_{\substack{x \to a \\ x \in H}}$ jelöli. Ha a v függvény értelmezési tartománya H-val egyenlő, akkor a fenti definícióban a „halmazra szorítkozva” kitételt elhagyhatjuk. Ezt a szokásos módon jelöljük, azaz $\lim_{x \to a} v(x) = b$. {Fde:vektormezo.pontbeli.hat

Szükséges és elégséges feltétel a határérték létezésére.

Tétel: Szükséges és elégséges feltétel a határérték létezésére.
Legyen $H \subseteq E \subseteq \mathbb{R}^3$, legyen a a H halmaz torlódási pontja, és legyen $b = (b_1, b_2, b_3) \in \mathbb{R}^3$. A $v : H \to \mathbb{R}^3$ függvényre akkor és csak akkor {Fte:vektormezo.pontbeli.hat

teljesül, hogy $\lim_{\substack{x\to a\\x\in H}} v(x) = b$, ha a v függvény mindegyik v_i $(i = 1, 2, 3)$ koordinátafüggvényére teljesül, hogy

$$\lim_{\substack{x\to a\\x\in H}} v_i(x) = b_i \qquad i = 1, 2, 3 \text{ esetén.} \tag{2}$$

Bizonyítás:
Az állítás a definíció egyszerű következménye. Minden $y = (y_1, y_2, y_3) \in \mathbb{R}^3$ pontra $|y - b| < |y_1 - b_1| + |y_2 - b_2| + |y_3 - b_3|$ és $|y_i - b_i| < |y - b|$ minden $i = 1, 2, 3$-ra.

Vektor-vektor függvény folytonossága

Definíció: Vektor-vektor függvény pontbeli folytonossága
Legyen $H \subseteq E \subseteq \mathbb{R}^3$ és $a \in H$. Azt mondjuk, hogy a $v : E \to \mathbb{R}^3$ függvény **folytonos** az a pontban a H halmazra szorítkozva, ha minden $\epsilon > 0$-hoz van olyan $\delta > 0$, hogy minden $x \in H$, $|x - a| < \delta$ esetén $|v(x) - v(a)| < \epsilon$. {Fde:vektormezo.pontbeli.fol

Megjegyzés:
Ha a v függvény értelmezési tartománya H-val egyenlő, akkor a fenti definícióban a „halmazra szorítkozva” kitételt elhagyhatjuk.

Definíció: Vektor-vektor függvény folytonossága
Azt mondjuk, hogy a v folytonos a H halmazon, ha a $v(r)$ vektormező minden $a \in H$ pontban folytonos. {Fde:vektormezo.folyt}

Szükséges és elégséges feltétel pontbeli folytonosságra

Tétel: Szükséges és elégséges feltétel pontbeli folytonosságra
A v vektormező akkor és csak akkor folytonos az a pontban a H halmazra szorítkozva, ha ez a v minden koordinátafüggvényére igaz. {Fte:vektormezo.folyt}

Bizonyítás:
Egyszerűen következik a határérték létezéséről szóló szükséges és elégséges feltételből.

Speciális vektormezők {Fmi:spec.vektormezok}

Mintafeladat: Speciális vektormezők

1. Írjuk fel az origón átmenő e (egységvektor) irányvektorú térbeli egyenesre való vetítést!
2. Írjuk fel az origón átmenő e (egységvektor) irányvektorú térbeli egyenesre való tükrözést!
3. Írjuk fel az origón átmenő e (egységvektor) normálvektorú síkra való tükrözést!

Megoldás:

1. *Javaslat:*
   Írjuk fel egy tetszőleges r vektornak az e vektorra való vetületi vektorát!

   Lépés:
   A skaláris szorzat kiszámítási képlete miatt az r vektornak az e vektorra való vetületi vektora

   $$(er)e. \tag{3}$$

   Így a keresett vektormező

   $$v(r) = (er)e. \tag{4}$$

2. *Javaslat:*
   Írjuk fel egy tetszőleges r vektornak az e vektorra való vetületi vektorát!

   Lépés:
   A skaláris szorzat kiszámítási képlete miatt az r vektornak az e vektorra való vetületi vektora

   $$(er)e. \tag{5}$$

   Javaslat:
   Állítsuk elő az r vektort a vetületi vektor és a rá merőleges vektor összegeként!

   Lépés:
   Ekkor

   $$r = (er)e + (r - (er)e). \tag{6}$$

   Javaslat:
   Állítsuk elő az r vektor tükörképét a vetületi vektor és a rá merőleges vektor lineáris kombinációjaként!

   Lépés:
   Ekkor az origón átmenő e (egységvektor) irányvektorú egyenesre való tükrözés:

   $$v(r) = 2(er)e - r. \tag{7}$$

3. *Javaslat:*
   Írjuk fel egy tetszőleges vektornak az e (normál)vektorra való vetületi vektorát!

   Lépés:
   A skaláris szorzat kiszámítási képlete miatt az r vektornak az e vektorra való vetületi vektora

   $$(er)e. \tag{8}$$

   Javaslat:

Állítsuk elő az r vektort a vetületi vektor és a rá merőleges vektor összegeként!

Lépés:
Ekkor

$$r = (er)e + (r - (er)e). \tag{9}$$

Javaslat:
Állítsuk elő az r vektor tükörképét a vetületi vektor és a rá merőleges vektor lineáris kombinációjaként!

Lépés:
Ekkor az origón átmenő e (egységvektor) normálvektorú síkra való tükrözés:

$$v(r) = -2(er)e + r. \tag{10}$$

A Vektormező lecke elméleti tesztfeladatai

Tesztkérdés:
Az alábbi állítások közül melyek az igaz állítások?

- ○ Ha egy vektormezőnek egy pontban létezik határértéke, akkor itt szükségszerűen folytonos is.
- ● Ha egy vektormező az értelmezési tartomány belső pontjában folytonos, akkor itt létezik határértéke is.
- ● Ha egy vektormező egy pontban folytonos, akkor a vektormező minden koordinátafüggvénye is folytonos itt.
- ● Ha egy vektormező minden koordinátafüggvénye is folytonos egy pontban, akkor a vektormező itt folytonos.

Megoldás:
Az első kérdés kivételével az összes állítás igaz. Az első kérdés még egy változóban sem teljesül, míg a többi ismert állítások következménye.

Tesztkérdés:
Mennyi az alábbi vektormező határértéke az origóban megadott pontban?

$$v(r) = \frac{x^3}{x^2+y^2}\vec{i} + \frac{y^3}{x^2+y^2}\vec{j} \tag{11}$$

Válasz: 0.

Megoldás:
Képezzük a vektormező koordinátafüggvényeinek origóban vett határértékét:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3}{x^2+y^2} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{y^3}{x^2+y^2} = 0, \tag{12}$$

így

$$\lim_{r\to 0} v(r) = 0. \tag{13}$$

1.2. Vektormező deriváltja

E lecke befejezése után a hallgató:

- ismeri a lineáris leképezés fogalmát és a lineáris leképezés mátrixát,
- megismerkedik a vektormező differenciálhatóságával,
- érti és ki tudja számítani egy differenciálható vektor-vektor függvény deriváltfüggvényét.

Megjegyzés:
Vektorértékű függvények differenciálhatóságának értelmezése esetén hasonlóan járunk el, mint azt a skalármező deriváltjának értelmezésénél tettük. Ilyen leképezések esetén a pontbeli derivált létezése lényegében azt jelenti, hogy a ebben a pontban a függvény megváltozása lineáris alakzattal „jól” közelíthető.

Lineáris leképezés

Definíció: Lineáris leképezés; lineáris transzformáció; tenzor
Az $A : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ függvényt **lineáris leképezésnek** vagy **lineáris transzformációnak** vagy **tenzornak** nevezzük, ha $A(x + y) = A(x) + A(y)$ és $A(\lambda x) = \lambda A(x)$ teljesül minden $x, y \in \mathbb{R}^3$ és $\lambda \in \mathbb{R}$ esetén. {Fde:lin.lekepezes}

Megjegyzés:
A leképezés pontosan akkor lineáris, ha minden koordinátafüggvénye lineáris.

Szükséges feltétel vektormező linearitására

Tétel: Szükséges feltétel vektormező linearitására
Ha a $v : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ vektormező lineáris leképezés, akkor $v(0) = 0$. {Fte:szuks.felt.vektormezo.l

Bizonyítás:
Könnyen látható, ugyanis a linearitás miatt

$$v(0) = v(0 + 0) = v(0) + v(0) = 2v(0), \tag{14}$$

azaz

$$v(0) = 0. \tag{15}$$

Lineáris leképezés mátrixa

Definíció: Lineáris leképezés mátrixa
Legyen az $A : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ adott leképezés és e_1, e_2, e_3 tetszőleges $\mathbb{R}^3$-beli bázis. Jelölje {Fde:lin.lekepezes.matrixa}

$$a_k = A(e_k) \qquad k = 1, 2, 3 \text{ esetén.} \tag{16}$$

Bontsuk fel az a_k vektorokat az e_k bázisban:

$$a_k = \sum_{i=1}^{3} a_{ik} e_i. \tag{17}$$

Az így kapott

$$\mathrm{A} = (a_{ik}) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \tag{18}$$

mátrixot nevezzük az A **lineáris leképezés adott bázisra vonatkozó mátrixának**.

Megjegyzés:
A vektorokat azonosítani tudjuk az oszlopmátrixokkal. Ismeretes, hogy rögzített bázisban $\mathrm{A} \cdot x = A(x)$ minden $x \in \mathbb{R}^3$ vektor esetén. (Itt a baloldalon mátrix, a jobboldalon lineáris leképezés, illetve vektor szerepel.)

Vektormező deriváltja, deriválttenzora

Definíció: Vektormező deriváltja, deriválttenzora
Legyen $H \subseteq \mathbb{R}^3$ és a a H belső pontja. Azt mondjuk, hogy a $v : H \to \mathbb{R}^3$ vektomező **differenciálható** az a pontban, ha van olyan $A : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ lineáris leképezés és $\varepsilon : H \to \mathbb{R}^3$ vektor-vektor függvény, hogy az adott a pont egy környezetében teljesül {Fde:vektormezo.derivaltja}

$$v(x) - v(a) = A(x-a) + \varepsilon(x)|x-a|, \text{ ahol } \lim_{x \to a} \varepsilon(x) = 0. \tag{19}$$

Differenciálható $v : H \to \mathbb{R}^3$ vektormező esetén az így (egyértelműen) létező $A : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ lineáris leképezést a $v(r)$ leképezés **deriválttenzorának** nevezzük az a pontban.

Szükséges és elégséges feltétel vektormező differenciálhatóságára

Tétel: Szükséges és elégséges feltétel vektormező differenciálhatóságára

Legyen $H \subseteq \mathbb{R}^3$ és a a H belső pontja. A $v : H \to \mathbb{R}^3$ vektormező pontosan akkor differenciálható az a pontban, ha mindegyik v_i $(i = 1, 2, 3)$ koordinátafüggvéye differenciálható a-ban. Ekkor a v deriválttenzor mátrixának az i-edik sor j-edik eleme egyenlő a v vektormező v_i koordinátafüggvényének j-edik változója szerinti parciális deriváltjával minden $i = 1, 2, 3$-ra és $j = 1, 2, 3$-ra, azaz {Fte:vektormezo.derivaltja}

$$\mathrm{A} = \begin{pmatrix} \frac{\partial v_1}{\partial x} & \frac{\partial v_1}{\partial y} & \frac{\partial v_1}{\partial z} \\ \frac{\partial v_2}{\partial x} & \frac{\partial v_2}{\partial y} & \frac{\partial v_2}{\partial z} \\ \frac{\partial v_3}{\partial x} & \frac{\partial v_3}{\partial y} & \frac{\partial v_3}{\partial z} \end{pmatrix}. \tag{20}$$

Bizonyítás:

1. Tegyük fel, hogy a $v : H \to \mathbb{R}^3$ vektormező differenciálható az a pontban. Ekkor létezik olyan $A : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ lineáris leképezés és $\varepsilon : H \to \mathbb{R}^3$ vektor-vektor függvény, hogy az a pont egy környezetében teljesül

   $$v(x) - v(a) = A(x-a) + \varepsilon(x)|x-a|, \tag{$*$}$$ {eq:derivalt}

   ahol

   $$\lim_{x \to a} \varepsilon(x) = 0. \tag{21}$$

   Egyszerűen megmutatható $(*)$ két oldalán lévő vektorok koordinátáinak egyezőségének következményeként.

2. Tegyük fel, hogy a $v : H \to \mathbb{R}^3$ vektormező mindegyik v_i koordinátafüggvénye differenciálható a-ban. A skalármezők differenciálása alapján
$$v_i(x) - v_i(a) = A_i(x-a) + \varepsilon_i(x)|x-a|, \tag{22}$$
ahol
$$A_i(x) = \frac{\partial v_i}{\partial x}(a)x_1 + \frac{\partial v_i}{\partial y}(a)x_2 + \frac{\partial v_i}{\partial z}(a)x_3 \tag{23}$$
és
$$\lim_{x\to a} \varepsilon(x) = 0. \tag{24}$$
Legyen
$$A(x) = (A_1(x), A_2(x), A_3(x)) \qquad x \in \mathbb{R}^3\text{-re}, \tag{25}$$
és
$$\varepsilon(x) = (\varepsilon_1(x), \varepsilon_2(x), \varepsilon_3(x)) \qquad x \in H. \tag{26}$$
Mivel az $A : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ lineáris leképezés, $\lim_{x\to a} \varepsilon(x) = 0$ és
$$v(x) - v(a) = A(x-a) + \varepsilon(x)|x-a| \qquad x \in H\text{-ra}, \tag{27}$$
ezért a v vektormező differenciálható az a pontban.

Vektormező Jacobi-mátrixa

Definíció: Vektormező Jacobi-mátrixa

Legyen $H \subseteq \mathbb{R}^3$ és a a H belső pontja. Tegyük fel, hogy a $v : H \to \mathbb{R}^3$ vektormező differenciálható az a pontban. A differenciálhatóság miatt létező $A : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ lineáris leképezést a v **vektor-vektor függvény deriváltjának** nevezzük az a pontban és $\frac{\partial v}{\partial r}(a)$-val jelöljük. Az $\frac{\partial v}{\partial r}(a)$ lineáris leképezés mátrixát, azaz a {Fde:vektomezo.Jacobi.matrix

$$\mathrm{A} = \begin{pmatrix} \frac{\partial v_1}{\partial x} & \frac{\partial v_1}{\partial y} & \frac{\partial v_1}{\partial z} \\ \frac{\partial v_2}{\partial x} & \frac{\partial v_2}{\partial y} & \frac{\partial v_2}{\partial z} \\ \frac{\partial v_3}{\partial x} & \frac{\partial v_3}{\partial y} & \frac{\partial v_3}{\partial z} \end{pmatrix}. \tag{28}$$

mátrixot a v vektormező a pontbeli **Jacobi-mátrixának** nevezzük.

Lineáris leképezés deriváltja

Tétel: Lineáris leképezés deriváltja

Tetszőleges $A : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ lineáris leképezés differenciálható minden pontban és a deriváltja önmaga. {Fte:lin.lek.derivalt}

Bizonyítás:

A differenciálhatóság definíciójából közvetlenül látható.

Jacobi-mátrix

Mintafeladat: Jacobi-mátrix 1

Határozzuk meg az alábbi vektormező Jacobi-mátrixát az $(1,1,1)$ pontban. {Fmi:Jacobi.matrix1}

$$v(x,y,z) = x^3y^2z\vec{i} + \ln(xy)\vec{j} + xz^2\vec{k}. \tag{29}$$

Megoldás:

Javaslat:

Számítsuk ki a Jacobi-mátrix képletében szereplő parciális deriváltakat.

Lépés:

Az $\{(x,y,z) : xy > 0\}$ halmazon a v vektormező differenciálható és

$$\begin{aligned} \frac{\partial v_1}{\partial x} &= 3x^2y^2z & \frac{\partial v_1}{\partial y} &= 2x^3yz & \frac{\partial v_1}{\partial z} &= x^3y^2 \\ \frac{\partial v_2}{\partial x} &= \frac{1}{xy}y & \frac{\partial v_2}{\partial y} &= \frac{1}{xy}x & \frac{\partial v_2}{\partial z} &= 0 \\ \frac{\partial v_3}{\partial x} &= z^2 & \frac{\partial v_3}{\partial y} &= 0 & \frac{\partial v_3}{\partial z} &= 2xz. \end{aligned} \tag{30}$$

Javaslat:

Helyettesítsük be a Jacobi-mátrixba a kiszámított parciális deriváltakat.

Lépés:

Az $\{(x,y,z) : xy > 0\}$ halmazon a deriválttenzor mátrixa

$$\begin{pmatrix} 3x^2y^2z & 2x^3yz & x^3y^2 \\ \frac{1}{x} & \frac{1}{y} & 0 \\ z^2 & 0 & 2xz \end{pmatrix}, \tag{31}$$

így az adott pontbeli Jacobi-mátrix

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}. \tag{32}$$

Mintafeladat: Jacobi-mátrix 2

Írjuk fel az origón átmenő e (egységvektor) irányvektorú egyenesre való tükrözés Jacobi-mátrixát! {Fmi:Jacobi-matrix2}

Megoldás:

Javaslat:

Írjuk fel azt a vektormezőt, amely a tér tetszőleges vektorát tükrözi az origón átmenő e (egységvektor) irányvektorú egyenesre!

Lépés:

Mintafeladat: Speciális vektormezők-ben láttuk, hogy az origón átmenő e (egységvektor) irányvektorú egyenesre való tükrözés:

$$v(r) = 2(er)e - r. \tag{33}$$

Javaslat:

A linearitás miatt a vektormező deriváltja önmaga, így elegendő felírni a lineáris leképezés mátrixát!

Lépés:

$$v(r) = 2(er)e - r = 2e(er) - r = 2ee^T r - r = (2ee^T - \mathrm{E})r. \tag{34}$$

Következésképpen a v vektormező mátrixa és a Jacobi-mátrixa:

$$\mathrm{A} = 2ee^T - \mathrm{E}. \tag{35}$$

A Deriválás vektormezőben lecke elméleti tesztfeladatai

Tesztkérdés:
Válasszuk ki az alábbi vektormezők közül azokat, amelyek lineárisak.

- ● Síkban origó körüli pozitív irányú elforgatás.
- ○ Egy adott egyenesre való vetítés a síkban.
- ● Adott vektor irányában történő nyújtás a síkba.
- ○ Adott vektorral történő eltolás.
- ● Origón áthaladó síkra való vetítés (térben).
- ○ Adott síkra való tükrözés (térben).
- ● Origón áthaladó egyenesre történő tükrözés síkban vagy térben.

Megoldás:
Az 1., 3., 5. és a 7. vektormező lineáris, a többi nem. A 2., 4. és a 6. nem lehet lineáris, ugyanis ezen vektormezők esetén a nullvektor képe nem nullvektor. A többi vektormező linearitása egyszerűen következik a geometriai tulajdonságaiból.

Tesztkérdés:
Válasszuk ki az igaz állításokat!

- ● Vektormező differenciálhatóságából következik a folytonossága is.
- ○ Vektormező folytonosságából mindig következik a differenciálhatósága.

Megoldás:
Az első igaz, a második hamis állítás.

1. Legyen $H \subseteq \mathbb{R}^3$ és a a H belső pontja és tegyük fel, hogy a $v : H \to \mathbb{R}^3$ vektormező differenciálható az a pontban. Ekkor van olyan $A : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ lineáris leképezés és $\varepsilon : H \to \mathbb{R}^3$ vektor-vektor függvény, hogy az a pont egy környezetében teljesül

   $$v(x) - v(a) = A(x-a) + \varepsilon(x)|x-a|, \tag{36}$$

   ahol $\lim_{x\to a} \varepsilon(x) = 0$. Ebből következőleg

   $$\lim_{x\to a}(v(x) - v(a)) = \lim_{x\to a}(A(x-a) + \varepsilon(x)|x-a|) = 0, \tag{37}$$

   azaz

   $$\lim_{x\to a} v(x) = v(a), \tag{38}$$

   azaz v az a pontban folytonos.

2. Az állítás egyváltozós függvények körében sem teljesül.

1.3. Skalárinvariánsok, vektorinvariáns, divergencia, rotáció

Lineáris leképezés első, második és harmadik skalárinvariánsa

Megjegyzés:
Az alkalmazásokban igen fontos szerep jut lineáris leképezés alábbiakban definiálandó skalárinvariánsainak, illetve a vektorinvariánsának. Mivel a lineáris leképezés sajátértékeit bázistól függetlenül értelmeztük, ezért a sajátértékek a bázistól független „invariánsok” . Így a lineáris leképezést különböző bázisokban reprezentáló mátrixok sajátértékeinek halmaza (multiplicitásokkal együtt) ugyanaz.

Definíció: Lineáris leképezés skalárinvariánsai
Legyenek az $A : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ lineáris leképezés sajátértékei $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ számok. Ekkor az {Fde:lin.lek.skalarinvarians

1. $$i_1 = \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 \tag{39}$$
   számot az A lineáris leképezés **első skalárinvariánsának**, az
2. $$i_2 = \lambda_1\lambda_2 + \lambda_1\lambda_3 + \lambda_2\lambda_3 \tag{40}$$
   számot az A lineáris leképezés **második skalárinvariánsának**, az
3. $$i_3 = \lambda_1\lambda_2\lambda_3 \tag{41}$$
   számot az A lineáris leképezés **harmadik skalárinvariánsának** nevezzük.

Lineáris leképezés skalárinvariánsai

Tétel: Lineáris leképezés skalárinvariánsai
Jelölje $A : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ lineáris leképezésnek rögzített ortonormált bázisban a mátrixát A, valamint jelölje az A mátrix (a_{ik}) eleméhez tartozó előjeles aldeterminánsokat D_{ik}. Ekkor a fenti jelölésekkel: {Fte:lin.lek.skalarinvarians

$$i_1 = \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = \operatorname{Tr} \mathrm{A} = a_{11} + a_{22} + a_{33} \tag{42}$$
$$i_2 = \lambda_1\lambda_2 + \lambda_1\lambda_3 + \lambda_2\lambda_3 = D_{11} + D_{22} + D_{33} \tag{43}$$
$$i_3 = \lambda_1\lambda_2\lambda_3 = \det \mathrm{A}. \tag{44}$$

Bizonyítás:
A karakterisztikus egyenlet részletes felírása, a determináns (első sor szerinti) kifejtése, annak A hatványai szerint való rendezése után, a Viète-formulák alkalmazásával az állítás adódik. Ezek alapján az A mátrix karakterisztikus polinomja $-\lambda^3 + i_1\lambda^2 - i_2\lambda + i_3 = 0$.

Megjegyzés:
Lineáris leképezés skalárinvariánsai bázistranszformációra nézve invariánsok és skalármennyiségek függetlenül attól, hogy a sajátérték valós vagy komplex szám.

Szimmetrikus és antiszimmetrikus lineáris leképezés

Definíció: Szimmetrikus és antiszimmetrikus lineáris leképezés
Azt mondjuk, hogy egy $A : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ lineáris leképezés **szimmetrikus**, illetve **antiszimmetrikus**, ha egy ortonormált bázisban a leképezés mátrixa szimmetrikus, illetve antiszimmetrikus. {Fde:szim.antiszim.lek}

Megjegyzések:

- Egy lineáris leképezés első skalárinvariánsa megegyezik a szimmetrikus részének első skalárinvariánsával.
- Antiszimmetrikus lineáris leképezés első, ill. harmadik skalárinvariánsa nulla.

a kereszt tenzor

Definíció: a kereszt tenzor
Legyen a adott vektor. Azt a lineáris leképezést, mely minden r vektorhoz az $a \times r$ vektort rendeli, a **kereszt tenzornak** nevezzük és $a\times$-tel jelöljük. {Fde:kereszttenzor}

Megjegyzések:

- A vektoriális szorzat disztributivitásából következően az $a\times$ valóban lineáris leképezés.
- Az $a\times$ minden r vektort a-ra merőleges vektorba visz át. Az a-ra merőleges vektorok invariáns alteret képeznek, de ebben egyetlen sajátvektor sincs. Az a vektor sajátvektor $\lambda = 0$ sajátértékkel. Ha a nullvektor, akkor minden vektor sajátvektor 0 sajátértékkel.

Minden antiszimmetrikus leképezés kereszttenzor

Tétel: Minden antiszimmetrikus leképezés kereszttenzor
Egy $Z : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ lineáris leképezés pontosan akkor antiszimmetrikus, ha létezik egyetlen olyan a vektor, hogy minden $r \in \mathbb{R}^3$-ra {Fte:antiszim.lek.kereszttem

$$Z(r) = a \times r, \tag{45}$$

azaz

$$Z = a\times. \tag{46}$$

Bizonyítás:

1. Megmutatjuk, hogy az $a\times$ tenzor antiszimmetrikus. Legyen e_1, e_2, e_3 adott ortonormált jobbrendszert alkotó bázis. Ekkor egyértelműen léteznek a_1, a_2, a_3 skalárok, hogy

$$a = \sum_{i=1}^{3} a_i e_i. \tag{47}$$

Mivel

$$a \times e_k = \sum_{i=1}^{3} a_i (e_i \times e_k), \tag{48}$$

ezért az e_1, e_2, e_3 ortonormáltsága miatt

$$a \times e_1 = -a_2 e_3 + a_3 e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ a_3 \\ -a_2 \end{pmatrix} \tag{49}$$

$$a \times e_2 = a_1 e_3 - a_3 e_1 = \begin{pmatrix} -a_3 \\ 0 \\ a_1 \end{pmatrix} \tag{50}$$

$$a \times e_3 = -a_1 e_2 + a_2 e_1 = \begin{pmatrix} a_2 \\ -a_1 \\ 0 \end{pmatrix}. \tag{51}$$

Ezek alapján az $a\times$ tenzor mátrixa

$$\begin{pmatrix} 0 & -a_3 & a_2 \\ a_3 & 0 & -a_1 \\ -a_2 & a_1 & 0 \end{pmatrix}, \tag{52}$$

ami láthatólag antiszimmetrikus.

2. Tegyük fel, hogy $Z : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ antiszimmetrikus lineáris leképezés és legyen e_1, e_2, e_3 jobbrendszert alkotó ortonormált bázisban a $\mathrm{Z} = (z_{ik})$ $(i, k = 1, 2, 3)$ antiszimmetrikus mátrix. Mivel Z antiszimmetrikus, ezért

$$z_{ii} = 0 \text{ és } z_{ik} = -z_{ki}, \text{ ha } i, k = 1, 2, 3. \tag{53}$$

A fenti jelölésekkel legyen

$$a_1 = z_{32} \qquad a_2 = z_{13} \qquad a_3 = z_{21}. \tag{54}$$

Ekkor minden r vektor esetén (vektorokat oszlopmátrixokkal azonosítva)

$$Z(r) = \mathrm{Z} \cdot r = a \times r, \tag{55}$$

ahol

$$a = a_1 e_1 + a_2 e_2 + a_3 e_3. \tag{56}$$

Így beláttuk, hogy a tetszőlegesen rögzített e_1, e_2, e_3 bázisban található Z-hez a kívánt tulajdonságú a vektor.

Megmutatjuk, hogy az a választása nem függ a bázistól. Legyen $\tilde{e}_1, \tilde{e}_2, \tilde{e}_3$ egy tetszőleges másik jobbrendszert alkotó ortonormált bázis és legyen M az előző, illetve az utóbbi bázis közötti irányítástartó transzformáció ortogonális mátrixa. Ekkor ismeretes, hogy

$$\tilde{a} = \mathrm{M}^T a \text{ és } \tilde{\mathrm{Z}} = \mathrm{M}^T \mathrm{Z} \mathrm{M}. \tag{57}$$

Ebből következőleg

$$\begin{aligned} \tilde{\mathrm{Z}} \tilde{r} &= (\mathrm{M}^T \mathrm{Z} \mathrm{M})(\mathrm{M}^T r) = \mathrm{M}^T \mathrm{Z} \mathrm{M} \mathrm{M}^T r \\ &= \mathrm{M}^T (\mathrm{Z} r) \text{ az } M \text{ ortogonalitása miatt} \\ &= \mathrm{M}^T (a \times r) = \widetilde{a \times r}, \end{aligned} \tag{58}$$

ahol

$$a \times r = \widetilde{a \times r} \text{ az új bázisban.} \tag{59}$$

Következésképpen:

$$\tilde{Z}\tilde{r} = \tilde{a} \times \tilde{r}. \tag{60}$$

Az egyértelműség belátásához tegyük fel, hogy Z-hez két a_1 és a_2 vektor tartozik úgy, hogy fennáll a

$$Z(r) = a_1 \times r \text{ és } Z(r) = a_2 \times r \text{ azonosság.} \tag{61}$$

Kivonással és rendezéssel azt kapjuk, hogy minden r vektorra

$$(a_1 - a_2) \times r = 0. \tag{62}$$

Ebből következően $a_1 = a_2$.

Antiszimmetrikus tenzor vektorinvariánsa

Definíció: Antiszimmetrikus tenzor vektorinvariánsa
Legyen Z antiszimmetrikus tenzor és legyen a az az egyértelműen meghatározott vektor, melyre $Z = a\times$. Az a vektor kétszeresét a Z **antiszimmetrikus tenzor vektorinvariánsának** nevezzük. {Fde:antiszim.lek.vektorinv}

Megjegyzés:
A Z antiszimmetrikus tenzor vektorinvariánsa az a $w = 2a$ vektor, melyre

$$Z(r) = \frac{1}{2} w \times r. \tag{63}$$

Tenzor vektorinvariánsa

Definíció: Tenzor vektorinvariánsa
Egy tetszőleges **tenzor vektorinvariánsának** a tenzor antiszimmetrikus részének vektorinvariánsát nevezzük. {Fde:lin.lek.vektorinv}

Megjegyzések:

- Ismeretes, hogy minden tenzor egyértelműen felbontható egy szimmetrikus és egy antiszimmetrikus tenzor összegére.
- A konstrukcióból látható, hogy a vektorinvariáns ortonormált irányított bázistranszformációra nézve invariáns.

Vektor-vektor függvény divergenciája

Definíció: Vektor-vektor függvény divergenciája
Egy $v : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ differenciálható vektor-vektor függvény r pontbeli deriválttenzorának első skalárinvariánsát $v(r)$ r-beli **divergenciájának** nevezzük és $\operatorname{div} v(r)$-rel jelöljük. {Fde:vektormezo.div}

Vektor-vektor függvény divergenciájának kiszámítása

Tétel: Vektor-vektor függvény divergenciája
Legyen $v : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ differenciálható vektor-vektor függvény adott ortonormált bázisban {Fte:vektormezo.div}

$$v(r) = v_1(r)e_1 + v_2(r)e_2 + v_3(r)e_3. \tag{64}$$

Ekkor

$$\operatorname{div} v(r) = \frac{\partial v_1(r)}{\partial x} + \frac{\partial v_2(r)}{\partial y} + \frac{\partial v_3(r)}{\partial z}. \tag{65}$$

Bizonyítás:
A differenciálható vektor-vektor függvény divergenciája a deriválttenzor mátrixának a nyoma, azaz a főátló elemeinek az összege.

Vektor-vektor függvény rotációja

Definíció: Definíció: Vektor-vektor függvény rotációja
Egy $v : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ differenciálható vektor-vektor függvény $r \in \mathbb{R}^3$ pontbeli deriválttenzorának vektorinvariánsát a $v(r)$ r-beli **rotációjának** nevezzük és $\operatorname{rot} v(r)$-rel jelöljük. {Fde:vektormezo.rot}

Megjegyzés:
Megmutatható, hogy az ω szögsebességgel forgó merev test sebességmezője

$$v(r) = \omega \times r. \tag{66}$$

Mivel ezen vektor-vektor függvény nyilvánvalóan antiszimmetrikus, azért a vektor-vektor függvény deriválttenzora az $\omega\times$ tenzor, így ennek a vektorinvariánsa 2ω.

Következésképpen a rotáció a forgásra jellemző szögsebesség vektor kétszerese.

Forrás- illetve örvénymentes vektormező

Definíció: Forrás- illetve örvénymentes vektormező
Legyen $v : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ egy differenciálható vektor-vektor függvény. Azt mondjuk, hogy a v vektormező **forrásmentes** (**divergenciamentes**), illetve **örvénymentes** (**rotációmentes**) vektormező egy $D \subseteq \mathbb{R}^3$ nyílt halmazon, ha $\operatorname{div} v(r) = 0$, illetve $\operatorname{rot} v(r) = 0$, ha $r \in D$. {Fde:forment.orvment.vektror

Vektormező rotációjának kiszámítása

Tétel: Vektormező rotációjának kiszámítása
Legyen $v : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ differenciálható vektor-vektor függvény adott jobbrendszert alkotó ortonormált bázisban {Fte:vektormezo.rotacio.kisz

$$v(r) = v_1(r)e_1 + v_2(r)e_2 + v_3(r)e_3. \tag{67}$$

Ekkor

$$\operatorname{rot} v(r) = \left(\frac{\partial v_3(r)}{\partial y} - \frac{\partial v_2(r)}{\partial z}\right) e_1 + \left(\frac{\partial v_1(r)}{\partial z} - \frac{\partial v_3(r)}{\partial x}\right) e_2 + \left(\frac{\partial v_2(r)}{\partial x} - \frac{\partial v_1(r)}{\partial y}\right) e_3. \tag{68}$$

Bizonyítás:
A differenciálható vektor-vektor függvény rotációja a deriválttenzor antiszimmetrikus részének vektorinvariánsa.

Nabla operátor

Definíció: Nabla operátor
Legyen e_1, e_2, e_3 és adott jobbrendszert alkotó ortonormált bázis. Jelölje ∇ a következő differenciáloperátor értékű vektort: {Fde:nabla.operator}

$$\nabla := \frac{\partial}{\partial x}e_1 + \frac{\partial}{\partial y}e_2 + \frac{\partial}{\partial z}e_3. \tag{69}$$

Ezt a vektor értékű differenciáloperátort nevezzük **nabla operátornak**.

Megjegyzések:

- A nabla operátorra teljesülnek a következő azonosságok:
  $u : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ differenciálható skalár-vektor függvényre:
  $$\nabla \mathrm{u} = \operatorname{grad} \mathrm{u} = \frac{\partial \mathrm{u}}{\partial x}e_1 + \frac{\partial \mathrm{u}}{\partial y}e_2 + \frac{\partial \mathrm{u}}{\partial z}e_3, \tag{70}$$
  $v : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ differenciálható vektor-vektor függvényre:
  $$\nabla \cdot v = \operatorname{div} v = \frac{\partial v_1}{\partial x} + \frac{\partial v_2}{\partial y} + \frac{\partial v_3}{\partial z}, \tag{71}$$
  $v : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ differenciálható vektor-vektor függvényre:
  $$\nabla \times v = \operatorname{rot} v = \det \begin{pmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{pmatrix} \tag{72}$$
  $u_1, u_2 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ differenciálható skalár-vektor függvény esetén:
  $$\nabla(\mathrm{u}_1\mathrm{u}_2) = \mathrm{u}_1\nabla\mathrm{u}_2 + \mathrm{u}_2\nabla\mathrm{u}_1 \text{ (Leibniz-szabály).} \tag{73}$$
- A nabla operátorral való formális műveleteket nem fogadunk el, ugyanis van, amikor ez hibás azonosságokra vezet. Ilyen például $\mathrm{u} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ differenciálható skalár-vektor és $v : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ differenciálható vektor-vektor függvényre az alábbi rossz azonosság:
  $$\nabla(\mathrm{u}v) = \mathrm{u}\nabla v \tag{74}$$
  A nabla szimbolika formális alkalmazásával valóban ezt kapnánk, de ez nyilvánvalóan nem igaz, ugyanis megmutatható, hogy
  $$\nabla(\mathrm{u}v) = \operatorname{div}(\mathrm{u}v) = v \cdot \nabla(\mathrm{u}) + \mathrm{u}\nabla(v) \tag{75}$$

Laplace-operátor

Definíció: Laplace-operátor
A ∇ operátor „négyzete”, azaz önmagával való skaláris szorzata a **Laplace-operátor**: {Fde:Laplace.operator}

$$\Delta := \nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}. \tag{76}$$

Divergencia, rotáció kiszámítása

{Fmi:div.rot}

Mintafeladat: Divergencia, rotáció kiszámítása
Határozza meg a v vektormező divergenciáját és rotációját, ahol

1.
$$v(x,y,z) = \begin{pmatrix} x^2+y \\ e^z+2 \\ xz \end{pmatrix} \tag{77}$$

2.
$$v(x,y,z) = \begin{pmatrix} xz\ln x \\ y^z \\ e^{z^2} \end{pmatrix} \tag{78}$$

Megoldás:

1. *Javaslat:*
   Helyettesítsünk be a divergencia képletébe.
   Lépés:
   $$\begin{aligned} \operatorname{div} v &= \frac{\partial v_1}{\partial x} + \frac{\partial v_2}{\partial y} + \frac{\partial v_3}{\partial z} \\ &= 2x + 0 + x = 3x. \end{aligned} \tag{79}$$
   Javaslat:
   Most pedig helyettesítsünk be a rotáció képletébe.
   Lépés:
   $$\begin{aligned} \operatorname{rot} v(r) &= \det \begin{pmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{pmatrix} \\ &= \left(\frac{\partial v_3(r)}{\partial y} - \frac{\partial v_2(r)}{\partial z} \right) e_1 + \left(\frac{\partial v_1(r)}{\partial z} - \frac{\partial v_3(r)}{\partial x} \right) e_2 + \left(\frac{\partial v_2(r)}{\partial x} - \frac{\partial v_1(r)}{\partial y} \right) e_3 \\ &= \left(\frac{\partial (xz)}{\partial y} - \frac{\partial (e^z+2)}{\partial z} \right) e_1 + \left(\frac{\partial (x^2+y)}{\partial z} - \frac{\partial (xz)}{\partial x} \right) e_2 + \left(\frac{\partial (e^z+2)}{\partial x} - \frac{\partial (x^2+y)}{\partial y} \right) e_3 \\ &= - \begin{pmatrix} e^z \\ z \\ 1 \end{pmatrix}. \end{aligned} \tag{80}$$

2. *Javaslat:*
   Helyettesítsünk be a divergencia képletébe.
   Lépés:

$$\begin{aligned}\operatorname{div} v &= \frac{\partial v_1}{\partial x} + \frac{\partial v_2}{\partial y} + \frac{\partial v_3}{\partial z} \\ &= \frac{\partial (xz \ln x)}{\partial x} + \frac{\partial (y^z)}{\partial y} + \frac{\partial \left(e^{z^2}\right)}{\partial z} \\ &= z\ln(x) + z + zy^{z-1} + 2ze^{z^2}.\end{aligned} \tag{81}$$

   Javaslat:
   Helyettesítsünk be a rotáció képletébe.
   Lépés:

$$\begin{aligned}\operatorname{rot} v(r) &= \det \begin{pmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{pmatrix} \\ &= \left(\frac{\partial v_3(r)}{\partial y} - \frac{\partial v_2(r)}{\partial z}\right) e_1 + \left(\frac{\partial v_1(r)}{\partial z} - \frac{\partial v_3(r)}{\partial x}\right) e_2 + \left(\frac{\partial v_2(r)}{\partial x} - \frac{\partial v_1(r)}{\partial y}\right) e_3 \\ &= \left(\frac{\partial (e^{z^2})}{\partial y} - \frac{\partial (y^z)}{\partial z}\right) e_1 + \left(\frac{\partial (xz\ln x)}{\partial z} - \frac{\partial (e^{z^2})}{\partial x}\right) e_2 + \left(\frac{\partial (y^z)}{\partial x} - \frac{\partial (xz\ln x)}{\partial y}\right) e_3 \\ &= \begin{pmatrix} -y^z \ln y \\ x \ln x \\ 0 \end{pmatrix}.\end{aligned} \tag{82}$$

Forrás- ill. örvénymentesség ellenőrzése

{Fmi: forras.ill.orvenyment

Mintafeladat: Forrás- ill. örvénymentesség ellenőrzése
Állapítsa meg, hogy a következő vektormező forrás- illetve örvénymentes-e?

$$v(r) = \frac{r}{|r|} \qquad r \neq 0. \tag{83}$$

Megoldás:
Javaslat:
Írjuk fel a vektormezőt Descartes koordinátarendszerben.
Lépés:

$$v(r) = \frac{r}{|r|} = \frac{1}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{1}{2}}} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{x}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{1}{2}}} \\ \frac{y}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{1}{2}}} \\ \frac{z}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{1}{2}}} \end{pmatrix}. \tag{84}$$

Javaslat:
A forrásmentesség megállapításához számítsuk ki a divergenciát.

Lépés:

$$\begin{aligned}\operatorname{div} v &= \frac{\partial v_1}{\partial x} + \frac{\partial v_2}{\partial y} + \frac{\partial v_3}{\partial z} \\ &= \frac{\partial\left(\frac{x}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{1}{2}}}\right)}{\partial x} + \frac{\partial\left(\frac{y}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{1}{2}}}\right)}{\partial y} + \frac{\partial\left(\frac{z}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{1}{2}}}\right)}{\partial z}\end{aligned} \tag{85}$$

Javaslat:
Számoljuk ki az összeg első tagját (a törtet bővítve egyszerűsítsük a kifejezést).
Lépés:

$$\begin{aligned}\frac{\partial\left(\frac{x}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{1}{2}}}\right)}{\partial x} &= \frac{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{1}{2}} - x\frac{1}{2}(x^2+y^2+z^2)^{-\frac{1}{2}}2x}{x^2+y^2+z^2} \\ &= \frac{(x^2+y^2+z^2)-x^2}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{y^2+z^2}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}.\end{aligned} \tag{86}$$

Javaslat:
Figyelembe véve a feladat szimmetriáját könnyen meghatározhatjuk a másik két tagot, így felírhatjuk a divergenciát.
Lépés:

$$\begin{aligned}\operatorname{div} v &= \frac{y^2+z^2}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}} + \frac{x^2+z^2}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}} + \frac{x^2+y^2}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}} \\ &= \frac{2x^2+2y^2+2z^2}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}.\end{aligned} \tag{87}$$

Következésképpen a vektormező nem forrásmentes.
Javaslat:
Az örvénymentesség megállapításához számítsuk ki a rotációt.
Lépés:

$$\begin{aligned}\operatorname{rot} v(r) &= \det\begin{pmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{pmatrix} \\ &= \det\begin{pmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{x}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{1}{2}}} & \frac{y}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{1}{2}}} & \frac{z}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{1}{2}}} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{\partial\left(\frac{z}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{1}{2}}}\right)}{\partial y} - \frac{\partial\left(\frac{y}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{1}{2}}}\right)}{\partial z} \\ \frac{\partial\left(\frac{x}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{1}{2}}}\right)}{\partial z} - \frac{\partial\left(\frac{z}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{1}{2}}}\right)}{\partial x} \\ \frac{\partial\left(\frac{y}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{1}{2}}}\right)}{\partial x} - \frac{\partial\left(\frac{x}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{1}{2}}}\right)}{\partial y} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{-zy}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}} - \frac{-zy}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}} \\ \frac{-xz}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}} - \frac{-xz}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}} \\ \frac{-yx}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}} - \frac{-yx}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.\end{aligned} \tag{88}$$

Mivel a vektormező rotációja nullvektor, az örvénymentes.

Gradiens divergenciájának meghatározása

{Fmi:grad.div}

Mintafeladat: Gradiens divergenciájának meghatározása
Határozzuk meg egy $\mathrm{u} \in C^2$ $\mathrm{u} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ skalármező gradiensének divergenciáját!

Megoldás:
Javaslat:
Helyettesítsünk be rendre a gradiens, majd a divergencia képletébe.
Lépés:

$$\begin{aligned}\operatorname{div}\operatorname{grad}\mathrm{u}(x,y,z) &= \nabla\cdot\nabla\mathrm{u}(x,y,z) = \nabla\cdot\operatorname{grad}\mathrm{u}(x,y,z)\\ &= \nabla\cdot\left(\frac{\partial\mathrm{u}(x,y,z)}{\partial x}e_1 + \frac{\partial\mathrm{u}(x,y,z)}{\partial y}e_2 + \frac{\partial\mathrm{u}(x,y,z)}{\partial z}e_3\right)\\ &= \frac{\partial^2\mathrm{u}(x,y,z)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\mathrm{u}(x,y,z)}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\mathrm{u}(x,y,z)}{\partial z^2} = \Delta\mathrm{u}(x,y,z),\end{aligned} \tag{89}$$

ahol Δ a Laplace-operátor.

Gradiens rotációjának a kiszámítása

{Fmi:grad.rot}

Mintafeladat: Gradiens rotációjának a kiszámítása
Határozzuk meg egy kétszer differenciálható $\mathrm{u} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ skalármző gradiensének a rotációját!

Megoldás:
Javaslat:
Helyettesítsünk be a gradiens és a rotáció képletébe.
Lépés:

$$\begin{aligned}\operatorname{rot}\operatorname{grad}\mathrm{u}(x,y,z) &= \nabla\times\nabla\mathrm{u}(x,y,z) = \det\begin{pmatrix} e_1 & e_2 & e_3\\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z}\\ \frac{\partial\mathrm{u}(x,y,z)}{\partial x} & \frac{\partial\mathrm{u}(x,y,z)}{\partial y} & \frac{\partial\mathrm{u}(x,y,z)}{\partial z}\end{pmatrix}\\ &= \begin{pmatrix}\frac{\partial^2\mathrm{u}(x,y,z)}{\partial y\partial z} - \frac{\partial^2\mathrm{u}(x,y,z)}{\partial z\partial y}\\ \frac{\partial^2\mathrm{u}(x,y,z)}{\partial z\partial x} - \frac{\partial^2\mathrm{u}(x,y,z)}{\partial x\partial z}\\ \frac{\partial^2\mathrm{u}(x,y,z)}{\partial x\partial y} - \frac{\partial^2\mathrm{u}(x,y,z)}{\partial y\partial z}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}.\end{aligned} \tag{90}$$

Megjegyzés:
Az utolsó lépésben a Young-tételt használtuk fel, miszerint a feladatban feltett tulajdonság esetén a vegyes parciális deriváltak felcserélhetők.

Rotáció divergenciájának kiszámítása

{Fmi:rotacio.divergenciaja}

Mintafeladat: Rotáció divergenciájának kiszámítása
Bizonyítsa be, hogy egy kétszer differenciálható $v : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ vektor-vektor függvény rotációjának divergenciája nulla!

Megoldás:
Javaslat:
Írjuk fel először a rotáció képletét, majd azt helyettesítsük be a divergencia képletébe.
Lépés:
Legyenek a v koordinátafüggvényei v_1, v_2 és v_3, azaz

$$v(r) = v_1(r)\vec{i} + v_2(r)\vec{j} + v_3(r)\vec{k}. \tag{91}$$

Ekkor

$$\begin{aligned}\operatorname{div}\operatorname{rot} v(r) &= \operatorname{div}\left(\left(\frac{\partial v_3(r)}{\partial y} - \frac{\partial v_2(r)}{\partial z}\right)e_1 + \left(\frac{\partial v_1(r)}{\partial z} - \frac{\partial v_3(r)}{\partial x}\right)e_2 + \left(\frac{\partial v_2(r)}{\partial x} - \frac{\partial v_1(r)}{\partial y}\right)e_3\right) \\ &= \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial v_3(r)}{\partial y} - \frac{\partial v_2(r)}{\partial z}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial v_1(r)}{\partial z} - \frac{\partial v_3(r)}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial v_2(r)}{\partial x} - \frac{\partial v_1(r)}{\partial y}\right) \\ &= \frac{\partial^2 v_3(r)}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 v_2(r)}{\partial x \partial z} + \frac{\partial^2 v_1(r)}{\partial y \partial z} - \frac{\partial^2 v_3(r)}{\partial y \partial x} + \frac{\partial^2 v_2(r)}{\partial z \partial x} - \frac{\partial^2 v_1(r)}{\partial z \partial y} = 0.\end{aligned} \tag{92}$$

Megjegyzés:
Az utolsó lépésben felhasználtuk a Young-tételt.

Megjegyzés:
Legyen $\mathrm{u}, \mathrm{u}_1, \mathrm{u}_2$ és v_1, v_2, v C^2-beli adott skalár- illetve vektormező. Ekkor teljesülnek az alábbi azonosságok:

1. $\operatorname{grad}(\mathrm{u}_1 \cdot \mathrm{u}_2) = \mathrm{u}_2 \operatorname{grad}(\mathrm{u}_1) + \mathrm{u}_1 \operatorname{grad}(\mathrm{u}_2)$
2. $\operatorname{div}(\mathrm{u} \cdot v) = v^T \operatorname{grad}(\mathrm{u}) + \mathrm{u} \operatorname{div}(v)$
3. $\operatorname{rot}(\mathrm{u}v) = \mathrm{u} \operatorname{rot}(v) + \operatorname{grad}(\mathrm{u}) \times v$
4. $\operatorname{div}(v_1 \times v_2) = -v_1^T \operatorname{rot}(v_2) - v_2^T \operatorname{rot}(v_1)$
5. $\operatorname{div}\operatorname{grad}(\mathrm{u}_1 \cdot \mathrm{u}_2) = \mathrm{u}_2 \Delta \mathrm{u}_1 + 2 \operatorname{grad}(\mathrm{u}_1)^T \operatorname{grad}(\mathrm{u}_2) + u_1 \Delta \mathrm{u}_2.$

A Skalárinvariánsok, vektorinvariáns, divergencia, rotáció lecke elméleti tesztfeladatai

Tesztkérdés:
Válasszuk ki az igaz állításokat!

- A kereszt tenzor divergenciája 0.
- Ha egy differencálható vektormező Jacobi-mátrixa szimmetrikus, akkor a rotációja 0.
- Tetszőleges antiszimmetrikus lineáris vektormező első és harmadik skalárinvariánsa 0.
- Az origóra való tükrözés rotációja 0.

Megoldás:
Mind a négy állítás igaz.

1. A kereszt tenzor antiszimmetrikus volta miatt a mátrixának a főátlójában csupa 0 szám szerepel, így a nyoma 0.

2. Egy szimmetrikus mátrixnak az antiszimmetrikus része nullmátrix, így a vektormező rotációja is 0.

3. Egy antiszimmetrikus lineáris vektormező mátrixának a főátlójában csupa 0 szám szerepel, így a nyoma 0. Ha A antiszimmetrikus mátrix, akkor
$$\mathrm{A} = -\mathrm{A}^T, \tag{93}$$
azaz
$$\det \mathrm{A} = -\det \mathrm{A}^T = -\det \mathrm{A}. \tag{94}$$
Így
$$\det \mathrm{A} = 0. \tag{95}$$

4. Az origóra tükrözés szimmetrikus leképezés, ezért a rotációja 0.

1.4. Térgörbék, görbe ívhossza

E lecke befejezése után a hallgató:

- megismerkedik a térgörbe definíciójával, nevezetes térgörbékkel és az ívhossz kiszámításával.

Görbe

Megjegyzés:
Először a görbe fogalmát kell tisztáznunk. Görbére gondolhatunk úgy, mint egy mozgó pont pályájára. Egy mozgó pontot viszont például úgy is megadhatunk, hogy minden időpillanatban megadjuk a pont helyét jelző vektort. A pont mozgását így egy olyan függvény írja le, amely az I nyílt vagy zárt időintervallum minden pontjához hozzárendel egy vektort abban a térben, amelyben a pont mozog. Amennyiben a pont az n dimenziós euklideszi térben mozog, akkor ez azt jelenti, hogy minden t-hez hozzárendelünk egy n dimenziós vektort. A továbbiakban fogadjuk el ezt a görbe értelmezéseként.

Definíció: Görbe
Görbének nevezzük az $r : I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ leképezéseket. {Fde:gorbe}

Megjegyzések:

- Ha $n = 2$, akkor síkgörbéről, ha pedig $n = 3$, akkor térgörbéről beszélünk.

- A fenti értelmezés igen általános értelmezése a görbének. Ismeretes, hogy létezik olyan folytonos síkgörbe, amely egy egész négyzetet kitölt, azaz létezik a szakasznak folytonos leképezése a négyzetre. Ekkor a négyzetben végtelen sok olyan pont van, amelyen a görbe többször is áthalad. Az ilyen görbék létezése azt jelenti, hogy még folytonos görbék is viselkedhetnek másféleképpen, mint azt a szemléletünk elvárná.

- A topológiában vonalnak szokták nevezni azon ponthalmazokat, amelyek zártak, összefüggőek, korlátosak és egydimenziósak. Ez áll legközelebb a görbéről alkotott szemléletünkhöz.

- Görbén magát a leképezést értjük, nem pedig a leképezés képhalmazát, azaz nem a görbét definiáló leképezés értékkészletét. Így a görbe leképezés, nem pedig $\mathbb{R}^n$-beli halmaz. Ha a H halmaz megegyezik a görbe képhalmazával, azaz $H = r(I)$, akkor azt mondjuk, hogy r a H halmaz (egy) paraméterezése. Egy halmaznak számos paraméterezése lehet!

Csavarvonal {Fmi:csavarvonal}

Mintafeladat: Csavarvonal
Írjon fel egy R sugarú, origó középpontú körlemez fölé emelt egyenes hengerfelületen haladó csavarvonalat.

Megoldás:
Javaslat:
Írjuk fel először, hogy hogyan kell a kört paraméterezni 2 dimenzióban.
Lépés:

$$R\cos(t)\vec{i} + R\sin(t)\vec{j} \tag{96}$$

Javaslat:
Most vegyük észre, hogy megfelelő módon hozzávéve a harmadik koordinátát a z tengely mentén elnyújthatjuk a körvonalat.
Lépés:

$$r(t) = R\cos(t)\vec{i} + R\sin(t)\vec{j} + bt\vec{k}, \tag{97}$$

ahol $t \in [\alpha, \beta]$ és $b \in \mathbb{R}$.

Nevezetes görbék {Fmi:nevezetes.gorbek}

Mintafeladat: Nevezetes görbék
Adjuk meg egy paraméterezését a következő görbéknek: {it:egyenes.param}

1. r_0 ponton átmenő, v irányvektorú egyenes,

2. differenciálható $r(t)$ görbét $t = t_0$-ban érintő egyenes,

3. origó középpontú ellipszis, melynek főtengelyei az x és y tengelyekkel párhuzamosak, és a féltengelyek hossza rendre adott a és b,

4. tetszőleges $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ függvény grafikonja.

Megoldás:

1. *Javaslat:*
   Lényegében azokat az $r(t)$ pontokat kell felírni, amelyekre az $r(t) - r_0$ vektor a v vektornak skalárszorosa.

   Lépés:
   $$r(t) - r_0 = tv \qquad t \in (-\infty, \infty), \tag{98}$$
   ahonnan
   $$r(t) = r_0 + tv \qquad t \in (-\infty, \infty) \tag{99}$$
   következik.

2. *Javaslat:*
   Használjuk fel az előző részfeladatot, vagyis határozzuk meg az egyenes irányvektorát és egy pontját.

   Lépés:
   Az $r(t)$ görbét a $t = t_0$-ban érintő egyenes irányvektora
   $$\dot{r}(t_0), \tag{100}$$
   az érintő egyenes egy pontja pedig:
   $$r(t_0). \tag{101}$$
   Ezt a két dolgot és az 1. mintafeladatot felhasználva kapjuk, hogy az érintő egyenes egy paraméterezése
   $$w(t) = r(t_0) + t\dot{r}(t_0) \qquad t \in (-\infty, \infty). \tag{102}$$

3. *Javaslat:*
   Először írjuk fel az ellipszis egyenletét.

   Lépés:
   Az ellipszis egyenlete:
   $$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1. \tag{103}$$
   Javaslat:
   Most határozzunk meg egy olyan
   $$r(t) = \begin{pmatrix} r_1(t) \\ r_2(t) \end{pmatrix} \tag{104}$$
   paraméterezést, vagyis az $r_1(t)$ és $r_2(t)$ függvényeket, melyre x helyére $r_1(t)$-t, y helyére $r_2(t)$-t helyettesítve azonosságot kapunk.

   Lépés:
   Felhasználva az ismert
   $$\sin^2(t) + \cos^2(t) = 1 \tag{105}$$
   trigonometrikus azonosságot láthatjuk, hogy az
   $$r_1(t) = a\cos(t) \tag{106}$$
   $$r_2(t) = b\sin(t) \tag{107}$$
   függvények megfelelőek lesznek. A t paraméter pedig a $[0, 2\pi)$ intervallumnak lesz eleme, mert a feladat szerint egy teljes ellipszist kell paraméterezni.

4. *Javaslat:*
   Írjuk fel a függvénygrafikon természetes paraméterezését.

   Lépés:
   Felírjuk azt a hozzárendelést, amely a $t \in [a,b]$-hez a $(t, f(t))$ vektort rendeli:
   $$r(t) = t\vec{i} + f(t)\vec{j}, \text{ ahol } t \in [a,b]. \tag{108}$$

Megjegyzések:

- A görbéket sokféleképpen lehet paraméterezni. Például az r_0 ponton átmenő, v irányvektorú egyenes megfelelő paraméterezései lennének a következők is:
  $$r(t) = r_0 + tv, \tag{109}$$
  $$r(t) = r_0 + 2tv, \tag{110}$$
  $$r(t) = r_0 + t^3 v, \text{ ahol } t \in (-\infty, \infty). \tag{111}$$
  Ezek mind ugyanazt a görbét írják le, csak a bejárás sebessége különbözik az egyes esetekben.

- Tekintsük azt az $r_1 : [0, 2\pi) \to \mathbb{R}^2$ leképezést, amelyre
  $$r_1(t) = (\cos(t), \sin(t)) \qquad t \in [0, 2\pi). \tag{112}$$
  A fenti síkgörbe egy olyan pont pályáját írja le, amely pozitív körüljárási irányban befutja az origó középpontú egységsugarú körvonalat, azaz az r_1 a körvonal egy paraméterezése.

  Megadhatjuk egyszerűen egy másik paraméterezését a fenti alakzatnak. Tekintsük most azt az $r_2 : [0, 2\pi) \to \mathbb{R}^2$ leképezést, amelyre
  $$r_2(t) = (\cos(3t), \sin(3t)) \qquad t \in [0, 2\pi). \tag{113}$$
  Az r_2 görbe képhalmaza ugyancsak a fenti körvonal, de „háromszor befutva”. Világos, hogy az $r_1(t) \neq r_2(t)$. Látható, hogy az $r_1(t)$ hossza 2π, míg az $r_2(t)$ hossza 6π. Ez a példa azt is mutatja, hogy az ívhosszt a görbéhez (vagyis a függvényhez) kell hozzárendelnünk, nem pedig a függvény képhalmazához.

Beírt poligon

Definíció: Töröttvonal; poligon
Töröttvonalnak (vagy **poligonnak**) nevezzük azon halmazokat, amelyek csatlakozó szakaszok uniói. Ha az $a_1, a_2, \ldots, a_N$ az $\mathbb{R}^n$ tér tetszőleges pontjai, akkor az a_i pontokat (ebben a sorrendben) összekötő poligon az $[a_1, a_2], [a_2, a_3], \ldots, [a_{N-1}, a_N]$ $\mathbb{R}^n$-beli szakaszokból áll. A töröttvonal hossza ezen szakaszok hosszának összege. {Fde:poligon}

Definíció: Beírt poligon
Legyen $\alpha = t_0 < t_1 < \cdots < t_N = \beta$ az $[\alpha, \beta]$ intervallum egy tetszőleges felosztása. Az $r : [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}^n$ görbe ezen felosztáshoz tartozó **beírt poligonjának** nevezzük az $r(t_0), r(t_1), \ldots, r(t_N)$ pontokat összekötő poligont. {Fde:beirt.poligon}

Ábra:Görbe beírt poligonja

Görbe ívhossza

Definíció: Görbe ívhossza

A **görbe ívhossza** a beírt poligonok hosszaiból álló halmaz felső határa. Azt mondjuk, hogy a görbe **rektifikálható** (kiegyenesíthető), ha a beírt poligonok hosszaiból álló halmaz felső határa véges. {Fde:gorbe.ivhossza}

Megjegyzések:

- Általában még a folytonosság sem elegendő egy görbe rektifikálhatóságához. Létezik példa korlátos zárt intervallumon értelmezett egyváltozós folytonos függvényre is, amelynek a függvénygrafikonja nem rektifikálható.

- Az $r : [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}^n$ görbe ívhossza az r leképezéstől függ, hiszen már a beírt poligonokat is az r segítségével definiáltuk. Ezek alapján általában nem beszélhetünk egy H halmaz ívhosszáról, még akkor sem, ha H egy görbe képhalmaza, más szóval, akkor sem, ha paraméterezhető. Ugyanis H-nak több paraméterezése is lehet, és előfordulhat, hogy a különböző paraméterezések ívhosszai különbözőek.

  Tekintsük például az alábbi görbéket:

  $$r_1(t) = (t^2, 0) \qquad t \in [0, 1] \tag{114}$$

  és

  $$r_2(t) = (t^2, 0) \qquad t \in [-1, 1]. \tag{115}$$

  Látható, hogy az r_1 és r_2 görbék ugyanazt a halmazt paraméterezik (nevezetesen az x-tengely $[0, 1]$ intervallumát), de az ívhosszuk nyilvánvalóan különböző.

- Bizonyos fontos esetekben a halmazhoz mégis hozzárendelhetünk egy egyértelmű ívhosszat.

Egyszerű görbe

Definíció: Egyszerű ív; egyszerű görbe

Egyszerű ívnek vagy **görbének** nevezzük azokat a halmazokat, amelyeknek létezik bijektív és folytonos paraméterezése. {Fde:egyszeru.iv}

Definíció: Egyszerű zárt görbe

Egyszerű zárt görbének nevezzük azokat a halmazokat, amelynek létezik olyan $r : [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}^n$ folytonos paraméterezése, amire minden $\alpha \le t < u \le \beta$ esetén $r(t) = r(u) \iff t = \alpha$ és $u = \beta$. {Fde:egyszeru.zart.gorbe}

Egyszerű görbe ívhossza

Tétel: Egyszerű görbe ívhossza

Ha $H \subseteq \mathbb{R}^n$ egyszerű ív, akkor H-nak bármely bijektív és folytonos paraméterezése ugyanazt az ívhosszt definiálja. {Fte:egyszeru.iv.hossza}

Bizonyítás:
Legyenek $r_1 : [\alpha, \beta] \to H$ és $r_2 : [\gamma, \delta] \to H$ bijektív és folytonos paraméterezései a H halmaznak. Ekkor a $p = r_2^{-1} \circ r_1$ függvény az $[\alpha, \beta]$ intervallumot bijektív módon a $[\gamma, \delta]$ intervallumra képezi, és meg lehet mutatni, hogy folytonos is. Ebből következik, hogy ekkor szükségképpen szigorúan monoton. Így $r_1 = r_2 \circ p$. Mivel a p függvény az $[\alpha, \beta]$ intervallumot bijektív és szigorú monoton módon az $[\gamma, \delta]$ intervallumra képezi, ebből következően az r_1 és r_2 görbéknek ugyanazok a beírt poligonjai. Valóban, legyen az $[\alpha, \beta]$ intervallum egy Φ felosztása $\alpha = t_0 < t_1 \dots < t_N = \beta$. Ekkor vagy $\gamma = p(\alpha) < p(t_1) < \dots < p(t_N) = \delta$ vagy $\gamma = p(t_N) < \dots < p(t_2) < p(t_1) = d$ attól függően, hogy a p növő vagy csökkenő. A két felosztás egyike szükségképpen a $[\gamma, \delta]$ intervallum egy felosztása lesz, amelyhez a fentiek alapján ugyanaz a beírt poligon tartozik, mint a Φ felosztáshoz. Következésképpen, az r_1 görbe tetszőleges beírt poligonja egyszersmind az r_2 görbének is beírt poligonja lesz. Az ívhossz definíciójából adódóan, ebből pedig az következik, hogy az r_1 és r_2 görbék ívhossza ugyanannak a számhalmaznak a szuprémuma, tehát a két ívhossz megegyezik.

Megjegyzés:
A fentiek szerint beszélhetünk az egyszerű ívek ívhosszáról: ezen bármelyik olyan paraméterezésnek az ívhosszát értjük, amely bijektív és folytonos.

Folytonos, differenciálható, folytonosan differenciálható, Lipschitz tulajdonságú görbe

Definíció: Folytonos, differenciálható, folytonosan differenciálható, Lipschitz tulajdonságú görbe

Tekintsünk egy $r : [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}^n$ görbét és jelöljük az $r(t)$ n dimenziós vektor koordinátáit $r_1(t), r_2(t), \dots, r_n(t)$-vel minden $t \in [\alpha, \beta]$-ra. Így minden $i = 1, 2, \dots, n$-re definiáltunk egy $r_i : [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}$ egyváltozós függvényt. Ezen függvényeket nevezzük az r görbe i-edik koordinátafüggvényének. A továbbiakban azt mondjuk, hogy az r görbe **folytonos**, **differenciálható**, **folytonosan differenciálható**, **Lipschitz tulajdonságú**, ha az r mindegyik koordinátafüggvénye rendelkezik a megfelelő tulajdonsággal. {Fde:folyt.diffhato.folytdif

Elégséges feltételek görbe rektifikálhatóságához

Tétel: Elégséges feltételek görbe rektifikálhatóságához 1
Legyen adott egy $r : [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}^n$ görbe. {Fte:elegs.felt.rekt1}

1. Ha r Lipschitz tulajdonságú, akkor r rektifikálható.
2. Ha az r görbe differenciálható és az r koordinátafüggvényeinek deriváltjai korlátosak az $[\alpha, \beta]$-n, akkor az r rektifikálható.
3. Ha az r folytonosan differenciálható, akkor r rektifikálható.

Bizonyítás:

1. Legyen az $r : [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}^n$ görbe Lipschitz tulajdonságú. Így minden $i = 1, 2, \ldots, n$-re és minden $x, y \in [\alpha, \beta]$-ra $|r_i(x) - r_i(y)| \le K|x - y|$. Ekkor minden $x, y \in [\alpha, \beta]$-ra $|r(x) - r(y)| \le Kn|n - y|$. Ebből azonnal következik, hogy r bármely beírt poligonjának a hossza legfeljebb $Kn(\beta - \alpha)$, tehát r rektifikálható.

2. A Lagrange-középértéktételből következik, hogy ha egy függvény differenciálható az $[\alpha, \beta]$ intervallumon és a deriváltja korlátos, akkor Lipschitz tulajdonságú. Így rektifikálhatósága 1.-ből adódik.

3. A 3. állítás nyilvánvaló 2.-ből, hiszen korlátos, zárt intervallumon folytonos függvények korlátosak.

Tétel: Elégséges feltételek görbe rektifikálhatóságához 2

Tegyük fel, hogy az $r : [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}^n$ görbe differenciálható, és az r koordinátafüggvényeinek deriváltjai Riemann-integrálhatóak $[\alpha, \beta]$-n. Ekkor r rektifikálható. {Fte:elegs.felt.rekt2}

Bizonyítás:

Mivel minden Riemann-integrálható függvény korlátos, így az r rektifikálható.

Ívhossz kiszámítása

Tétel: Ívhossz kiszámítása

Tekintsük a következő {Fte:ivhossz.kiszamitasa}

$$r(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k} \qquad t \in [\alpha, \beta] \tag{116}$$

görbét. Tegyük fel, hogy $\dot{r}(t) \neq 0$ ha $t \in [\alpha, \beta]$, $r \in C^1[\alpha, \beta]$. Ekkor az r görbe ívhosszát az alábbi képlettel lehet kiszámolni:

$$\int_\alpha^\beta |\dot{r}(t)|\, dt = \int_\alpha^\beta \sqrt{(\dot{x}(t))^2 + (\dot{y}(t))^2 + (\dot{z}(t))^2}\, dt. \tag{117}$$

Megjegyzések:

- A feltételek esetén a térgörbe ívhossza a paraméterezésre nézve invariáns, az a görbe egy másik paraméterezése esetén nem változik.

- A pont elmozdulása a t_0 és t időpontok között $r(t) - r(t_0)$. Az $\frac{r(t)-r(t_0)}{t-t_0}$ vektor a mozgó pont időegység alatti átlagos elmozdulását mutatja a $[t_0, t]$ időintervallumban. Ha $t \to t_0$, akkor ez az átlag a pont sebességvektorához tart. Így az $\dot{r}(t)$ (fizikai) jelentése az r görbe mentén mozgó pont sebességvektora a t időpillanatban. Másrészt az $\left|\frac{r(t)-r(t_0)}{t-t_0}\right|$ érték a mozgó pont időegység alatti átlagos elmozdulásának nagyságát mutatja a $[t_0, t]$ időintervallumban. Ennek a határértéke $t \to t_0$ esetén a mozgó pont pillanatnyi sebessége. A pillanatnyi sebesség tehát az $\dot{r}(t_0)$ sebességvektor abszolút értéke, azaz $|\dot{r}(t_0)|$. Így a görbe ívhossz képlet fizikai jelentése az, hogy egy (görbevonalú) mozgás során a mozgó pont által megtett út a pillanatnyi sebesség integrálja, ezért az ívhossz képletet is értelmezhetjük, mint a Newton–Leibniz-formula görbékre vonatkozó analógját.

- Természetesen a fenti görbe olyan egyszerű ív, amelynek paraméterezése bijektív és folytonos.

Kör kerülete {Fmi:kor.kerulete}

Mintafeladat: Kör kerülete
Számítsa ki egy R sugarú kör kerületét!

Megoldás:
Javaslat:
Először paraméterezzünk egy origó körüli R sugarú körvonalat.
Lépés:
Az origó középpontú R sugarú kör egy paraméterezése:

$$r(t) = R\cos(t)\vec{i} + R\sin(t)\vec{j}, \tag{118}$$

ahol $t \in [0, 2\pi)$.
Javaslat:
Határozzuk meg az ívhossz képletben szereplő $\dot{r}(t)$-t.
Lépés:

$$\dot{r}(t) = -R\sin(t)\vec{i} + R\cos(t)\vec{j}. \tag{119}$$

Javaslat:
Most pedig helyettesítsünk be az ívhossz képletébe.
Lépés:

$$\int_0^{2\pi} |\dot{r}(t)|\,dt = \int_0^{2\pi} \sqrt{R^2\sin^2(t) + R^2\cos^2(t)}\,dt = 2R\pi, \tag{120}$$

ami az ismert képlet.

Ívhossz kiszámítása {Fmi:ivhossz.kiszam}

Mintafeladat: Ívhossz kiszámítása
Számítsa ki a következő görbék ívhosszát:

1. Az
$$r(t) = 3t\vec{i} + 3t^2\vec{j} + 2t^3\vec{k} \tag{121}$$
görbének az $x = 3$ és az $x = 6$ egyenletű síkok közé eső részének az ívhossza.

2. Az
$$r(t) = \cos^3(t)\vec{i} + \sin^3(t)\vec{j} + \cos(2t)\vec{k} \tag{122}$$
görbének az ívhossza a $[0, 2\pi)$ intervallumon.

Megoldás:

1. *Javaslat:*
Határozzuk meg, hogy a t paraméter mely értékei adják meg a görbe azon pontjait, melyeket a síkok kimetszenek.

Lépés:
Az
$$x = 3 \tag{123}$$

egyenletű sík a tér azon pontjait tartalmazza, melyek x koordinátája 3. Vagyis a t paraméter keresett értékét a

$$3t = 3 \tag{124}$$

összefüggés adja meg, ahonnan:

$$t = 1. \tag{125}$$

Ugyanígy járunk el a másik sík esetében:

$$3t = 6, \tag{126}$$

ahonnan

$$t = 2. \tag{127}$$

Vagyis az ívhossz számításánál a

$$t \in [1, 2] \tag{128}$$

intervallumot kell figyelembe venni.

Javaslat:
Adott a görbe, és a tartomány, ahol a paraméter fut. Most határozzuk meg a görbe deriváltját.

Lépés:

$$\dot{r}(t) = 3\vec{i} + 6t\vec{j} + 6t^2\vec{k}. \tag{129}$$

Javaslat:
Rendelkezésünkre áll minden az ívhossz kiszámításához, helyettesítsünk be a képletébe.

Lépés:

$$\begin{aligned}
\int_1^2 |\dot{r}(t)|\, dt &= \int_1^2 \sqrt{3^2 + (6t)^2 + (6t^2)^2}\, dt \\
&= 3 \int_1^2 \sqrt{1 + 4t^2 + 4t^4}\, dt \\
&= 3 \int_1^2 \sqrt{(1 + 2t)^2}\, dt \\
&= 3 \int_1^2 (1 + 2t^2)\, dt = 4 \left[t + 2\frac{t^3}{3} \right]_1^2 = 17.
\end{aligned} \tag{130}$$

2. *Javaslat:*
Meghatározzuk a görbe deriváltját.

Lépés:

$$\dot{r}(t) = -3\cos^2(t)\sin(t)\vec{i} + 3\sin^2(t)\cos(t)\vec{j} - 2\sin(2t)\vec{k}. \tag{131}$$

Javaslat:
A paraméter által befutott intervallum adott, helyettesítsünk be a képletbe.

Lépés:

$$
\begin{aligned}
\int_0^{2\pi} |\dot{r}(t)|\, dt &= \int_0^{2\pi} \sqrt{(-3\cos^2(t)\sin(t))^2 + (3\sin^2(t)\cos(t))^2 + (-2\sin(2t))}\, dt \\
&= \int_0^{2\pi} \sqrt{(9\cos^4(t)\sin^2(t)) + 9\sin^4(t)\cos^2(t) + 4\sin^2(2t)}\, dt \\
&= \int_0^{2\pi} \sqrt{(9\cos^2(t)\sin^2(t))(\sin^2(t) + \cos^2(t)) + 4\sin^2(2t)}\, dt \\
&= \int_0^{2\pi} \sqrt{(9\cos^2(t)\sin^2(t)) + 4\sin^2(2t)}\, dt \\
&= \int_0^{2\pi} \sqrt{\frac{9}{4}\sin^2(2t) + 4\sin^2(2t)}\, dt \\
&= \int_0^{2\pi} \sqrt{\frac{25}{4}\sin^2(2t)} \\
&= \int_0^{2\pi} \left|\frac{5}{2}\sin^2(2t)\right| \\
&= 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{5}{2}\sin^2(2t) = 10.
\end{aligned}
\tag{132}
$$

1.5. Felületek, felület felszíne

E lecke befejezése után a hallgató:

- megismerkedik a felület definíciójával,
- ismeri néhány nevezetes felület paraméterezését,
- ki tudja számítani felületek felszínét.

Paraméterezett felület

Definíció: Kétparaméteres vektor-skalár függvény; paraméterezett felület

Egy $r : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ függvényt **kétparaméteres vektor-skalár függvénynek** vagy **paraméterezett felületnek** nevezzük, ha $D \subseteq \mathbb{R}^2$ értelmezési tartománya a valós számok halmaza önmagával vett direkt szorzatának részhalmaza, és a függvény minden $(u, v) \in D$-hez egy $\mathbb{R}^3$-beli vektort rendel függvényértékként. A D halmazt paramétertartománynak nevezzük. {Fde:ketparvektskalfugg}{Fde:parameterezettfelulet}

Megjegyzések:

- A felületek leírására, szemléltetésére általában kétparaméteres vektor-skalár függvényeket szoktunk használni. Ha a térben rögzítettük egy $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ bázist, akkor az $r(u, v)$ függvény értéke minden $(u, v) \in D$ esetén az $r(u, v) = x(u, v)\vec{i} + y(u, v)\vec{j} + z(u, v)\vec{k}$ alakban adható meg. Az így kapott $x(u, v), y(u, v), z(u, v)$ kétváltozós skalár függvények az $r(u, v)$ függvény koordinátafüggvényei. A kétparaméteres vektor-skalár függvény megadása ekvivalens három kétváltozós skalár függvény megadásával rögzített bázisban.

Ábra: Paraméterezett felület

- Azt mondjuk, hogy a paraméterezett felület **folytonos**, vagy **differenciálható**, vagy **folytonosan differenciálható**, ha a megfelelő leképezés rendelkezik a megfelelő tulajdonsággal.

Nevezetes felületek

{Fmi:nevezetes.feluletek}

Mintafeladat: Nevezetes felületek
Magyarázza el, hogy néznek ki a következő felületek:

1.
$$r(u,v) = Ru\cos v\vec{i} + Ru\sin v\vec{j} + u\vec{k}, \tag{133}$$
ahol
$$u \in [0,u_0], v \in [0,2\pi], R, u_0 \geq 0. \tag{134}$$

2.
$$r(u,v) = u\vec{i} + v\vec{j} + (1-u-v)\vec{k}, \tag{135}$$
ahol
$$u \in [0,1], v \in [0,1-u]. \tag{136}$$

Megoldás:

1. A felület egy kúpfelület, egy „fagyitölcsér”, melynek csúcsa az origóban van, szimmetriatengelye a z tengely, felfelé nyílik, u_0 magas és u_0 magasságban a kör átmérője Ru_0.
2. A felület egy szabályos háromszög, melynek három csúcsába az $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ vektorok mutatnak.

Felület felszíne

Megjegyzés:
Egy felület felszínének meghatározása jóval nehezebb feladat, mint a síkbeli halmazok területének vagy a testek térfogatának kiszámítása. A felszínszámításnál nem alkalmazható a a térfogat definíciójánál alkalmazott belülről és kívülről való közelítés módszere. Ha az ívhossz mintájára próbálkoznánk a beírt poliéderek felszínének szuprémumával, már a legegyszerűbb (forgás) felületek esetében sem jutnánk eredményre. Geőcze Zoárd (1873–1916) mutatott példát arra, hogy egy teljesen egyszerű egyenes körhengerbe is beírhatunk akármilyen nagy felszínű poliédereket. A felszín precíz fogalmának kialakításához a differenciálgeometria mély eszközeire van szükség,

Definíció: Felület felszíne
Legyen $D \subseteq \mathbb{R}^2$ Jordan-mérhető mérhető síkbeli részhalmaz, és legyen $r : D \to \mathbb{R}^3$ egy folytonosan differenciálható függvénnyel megadott paraméterezett F felület. Tegyük fel, hogy az $|r'_u \times r'_v|$ függvény integrálható D-n. Ez esetben azt mondjuk, hogy F **felszíne létezik**, és értéke {Fde:felulet.felszine}

$$\lambda(F) = \iint_D |r'_u \times r'_v| dD. \tag{137}$$

Megjegyzések:

- Mivel a feltétel szerint az $(u,v) \mapsto |r'_u \times r'_v|$ folytonos D-n, ezért a tételben szereplő integrál pontosan akkor létezik, ha az $(u,v) \mapsto |r'_u \times r'_v|$ korlátos a D halmazon. Ez például teljesül, ha D zárt halmaz. Mivel D korlátos a feltétel miatt, ez esetben F-nek létezik felszíne.

- Ha $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ folytonosan differenciálható függvény, akkor a függvény $[a,b]$-hez tartozó része grafikonjának az x-tengely körüli megforgatásával kapott F forgásfelület paraméterezése

$$r(u,v) = u\vec{i} + f(u)\cos v\vec{j} + f(u)\sin v\vec{k}, \tag{138}$$

ahol

$$u \in [a,b], v \in [0,2\pi) \tag{139}$$

leképezés. Ekkor az így paraméterezett felületnek a felszíne megegyezik az ismert felszínformulával, azaz

$$\lambda(F) = 2\pi \int_a^b f(x)\sqrt{1+f'(x)^2}\,dx. \tag{140}$$

- Az inverzfüggvény-tétel és az integrál transzformálási formulái alapján meg lehet mutatni, hogy ha egy $F \subseteq \mathbb{R}^3$ korlátos zárt halmaz paraméterezése injektív és folytonosan differenciálható leképezés, akkor a felszín értéke független a paraméterezéstől. Azaz ha $A \subseteq \mathbb{R}^2$, $B \subseteq \mathbb{R}^2$ Jordan-mérhető halmazok és $r_1 : A \to \mathbb{R}^3$, $r_2 : B \to \mathbb{R}^3$ egy-egy injektív folytonosan differenciálható függvényekkel megadott paraméterezése az felületnek, amelyre $r_1(A) = r_2(B)$, akkor

$$\iint_A |(r_1)'_u \times (r_1)'_v|\,dA = \iint_B |(r_2)'_u \times (r_2)'_v|\,dB. \tag{141}$$

Skalár-vektor függvény felületének felszíne

Tétel: Skalár-vektor függvény felületének felszíne
Legyen $A \subseteq \mathbb{R}^2$ Jordan-mérhető zárt halmaz. Tegyük fel, hogy $f : A \to \mathbb{R}$ folytonosan differenciálható. Ekkor f grafikonjának felszíne {Fte:skalar.vekt.fuggv.felul

$$\iint_A \sqrt{1+(f'_x)^2+(f'_y)^2}dA. \tag{142}$$

Bizonyítás:

$$r(x,y) = x\vec{i} + y\vec{j} + f(x,y)\vec{k}, \tag{143}$$

ahol

$$(x,y) \in A \tag{144}$$

az $f : A \to \mathbb{R}$ függvény grafikonjának egy folytonosan differenciálható paraméterezése.

Mivel

$$r'_x(x,y) = 1\vec{i} + 0\vec{j} + f'_x(x,y)\vec{k} \tag{145}$$

és

$$r'_y(x,y) = 0\vec{i} + 1\vec{j} + f'_y(x,y)\vec{k}, \tag{146}$$

ezért

$$|r'_x \times r'_y| = \sqrt{1 + (f'_x)^2 + (f'_y)^2}. \tag{147}$$

Gömb felszíne {Fmi:gomb.felszine}

Mintafeladat: Gömb felszíne
Számítsa ki egy R sugarú gömb felszínét!

Megoldás:
Javaslat:
Írjuk fel az origó körüli R sugarú gömbfelület egy paraméterezését.
Lépés:

$$r(u,v) = R\sin(u)\cos(v)\vec{i} + R\sin(u)\sin(u)\vec{j} + R\cos(u)\vec{k}, \tag{148}$$

ahol

$$u \in [0,\pi] \text{ és } v \in [0,2\pi]. \tag{149}$$

Javaslat:
Számoljuk ki az egyes parciális deriváltakat.
Lépés:

$$r'_u(u,v) = \begin{pmatrix} R\cos(u)\cos(v) \\ R\cos(u)\sin(v) \\ -R\sin(u) \end{pmatrix} \text{ és } r'_v(u,v) = \begin{pmatrix} -R\sin(u)\sin(v) \\ R\sin(u)\cos(v) \\ 0 \end{pmatrix}. \tag{150}$$

Javaslat:
Most pedig a keresztszorzatot.
Lépés:

$$\begin{aligned} r'_u(u,v) \times r'_v(u,v) &= \det \begin{pmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ R\cos(u)\cos(v) & R\cos(u)\sin(v) & -R\sin(u) \\ -R\sin(u)\sin(v) & R\sin(u)\cos(v) & 0 \end{pmatrix} \\ &= R^2\left(\sin^2(u)\cos(v)\vec{i} + \sin^2(u)\sin(v)\vec{j} + (\sin(u)\cos(u)\cos^2(v) + \sin(u)\cos(u)\sin^2(v))\vec{k}\right) \\ &= R^2\left(\sin^2(u)\cos(v)\vec{i} + \sin^2(u)\sin(v)\vec{j} + \sin(u)\cos(u)\vec{k}\right). \end{aligned} \tag{151}$$

Javaslat:
Most számítsuk ki ennek a vektornak a hosszát.

Lépés:

$$\begin{aligned}|r'_u(u,v)\times r'_v(u,v)| &= \sqrt{R^4(\sin^2(u)\sin(v))^2+R^4(\sin^2(u)\cos(v))^2+R^4(\sin(u)\cos(u))^2}\\ &= R^2\sqrt{\sin^4(u)\sin^2(v)+\sin^4(u)\cos^2(v)+\sin^2(u)\cos^2(u)}\\ &= R^2\sqrt{\sin^4(u)+\sin^2(u)\cos^2(u)}\\ &= R^2\sqrt{\sin^2(u)(\sin^2(u)+\cos^2(u))}\\ &= R^2\sqrt{\sin^2(u)}\\ &= R^2|\sin(u)|\\ &= R^2\sin(u)\end{aligned} \tag{152}$$

Javaslat:
Most már ki tudjuk számolni az integrált.
Lépés:

$$\begin{aligned}\int_0^\pi\int_0^{2\pi} R^2\sin(u)\,dv\,du &= R^2\int_0^\pi\int_0^{2\pi}\sin(u)\,dv\,du\\ &= R^2\int_0^\pi \sin(u)\,du\int_0^{2\pi}1\,dv\\ &= R^2\cdot 2\cdot 2\pi = 4R^2\pi.\end{aligned} \tag{153}$$

2. Második fejezet

2.1. Vonalintegrál

E lecke befejezése után a hallgató:

- megismerkedik a vonalintegrál fogalmával, tulajdonságaival,
- ki tudja számítani adott vektormezőnek egy paraméteres görbén vett vonalintegrálját.

Vonalintegrál

Megjegyzés:
Tekintsünk egy erőtér ellenében mozgást végző pontot. Tegyük fel, hogy egy pont mozgását egy $r:[\alpha,\beta]\to\mathbb{R}^3$ irányított görbe írja le, és a pontra az $r(t)$ helyen $v(r(t))$ nagyságú és irányú erő hat. Tekintsük az $[\alpha,\beta]$ intervallumnak egy $\alpha=t_0<t_1<\cdots<t_n=\beta$ felosztását, és tegyük fel, hogy az r görbének a felosztás $[t_{i-1},t_i]$ intervallumához tartozó r_i íve „jól" közelíthető az $[r(t_i),r(t_{i-1})]$ szakasszal. Tegyük fel továbbá, hogy az r_i íven az erő közelítőleg állandó. (Ha a görbe folytonosan differenciálható és a függvény folytonos, akkor ezek a feltételek minden elég finom felosztásra teljesülnek.) Ekkor a fizika tanítása szerint az erő által az r_i íven végzett munka jól közelíthető a $v(r(c_i))\cdot(r(t_i)-r(t_{i-1}))$ skalárszorzattal, ahol $c_i\in[t_{i-1},t_i]$ $(i=1,2,\ldots,n)$ tetszőleges pont. Mivel az erő által végzett munka az adott görbén egyenlő az r_i íveken végzett munkák

összegével, ezért a munkát jól közelíti a $\sum_{i=1}^{n} v(r(c_i)) \cdot (r(t_i) - r(t_{i-1}))$ összeg. Ha létezik olyan I szám, hogy ezek az összegek tetszőleges pontossággal megközelítik I-t elegendően finom felosztásra, akkor nyilván I lesz a keresett munkavégzés mértékszáma. A fenti gondolat motiválja a vonalintegrál következő definícióját.

Ábra: A vonalintegrál értelmezése

Definíció: Vonalintegrál

Legyen adott a γ görbének az $r : [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}^3$ egy paraméterezése és $v : r([\alpha, \beta]) \to \mathbb{R}^3$ adott vektor-vektor függvény. Azt mondjuk, hogy a v **vektormezőnek a görbén létezik a vonalintegrálja** és értéke az I szám, ha minden $\epsilon > 0$-hoz létezik olyan $\delta > 0$ szám, hogy ha az $\alpha = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = \beta$ az $[\alpha, \beta]$ intervallum δ-nál finomabb felosztása és $c_i \in [t_{i-1}, t_i]$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ tetszőleges pontok, akkor {Fde:vonalint}

$$\left| I - \sum_{i=1}^{n} v(r(c_i)) \cdot (r(t_i) - r(t_{i-1})) \right| < \epsilon. \tag{154}$$

Ebben az esetben a v vektormezőnek a γ görbén a vonalintegrálját a következőképpen jelöljük:

$$\int_\gamma v(r)\, dr. \tag{155}$$

Ha a γ görbe zárt, akkor a fenti vonalintegrálra a

$$\oint_\gamma v(r)\, dr \tag{156}$$

jelölést is használjuk.

Vonalintegrál kiszámítása

Tétel: Erős alak

Legyen adott a γ görbének az $r : [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}^3$ egy differenciálható paraméterezése és tegyük fel, hogy az $\dot{r}(t)$ koordinátafüggvényei integrálhatók $[\alpha, \beta]$-n. Tegyük fel, hogy a $v : r([\alpha, \beta]) \to \mathbb{R}^3$ vektor-vektor függvény az $r([\alpha, \beta])$-n folytonos. Ekkor az $\int_\gamma v(r)\, dr$ vonalintegrál létezik és az értéke {Fte:vonalint.kiszam.eros}

$$\int_\alpha^\beta v(r(t)) \cdot \dot{r}(t)\, dt. \tag{157}$$

Bizonyítás:

A bizonyítás meghaladja ezen tananyag kereteit. Feltételezné a vonalintegrál és az ún. Stieltjes-integrálok közötti kapcsolat ismeretét.

Tétel: Gyenge alak

Legyen adott a γ görbének az $r : [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}^3$ egy kétszer folytonosan differenciálható paraméterezése, amelyre $\dot{r}(t) \neq 0$, ha $t \in [\alpha, \beta]$. Tegyük fel, hogy a $v : D \subseteq \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ folytonos vektormező a γ-n. Ekkor az $\int_\gamma v(r)\, dr$ vonalintegrál létezik és az értéke {Fte:vonalint.kiszam.gyenge}

$$\int_\gamma v(r)\, dr = \int_\alpha^\beta v(r(t)) \cdot \dot{r}(t)\, dt. \tag{158}$$

Bizonyítás:
A feltételek miatt az állítás jobb oldalán álló integrandus folytonos, így a határozott integrál létezik.

Megmutatjuk, hogy a γ görbe bármely minden határon túl finomodó $\{\Phi_k\}$ felosztássorozatára a v megfelelő integrálközelítő összeg sorozata az állítás jobb oldalához tart.

Legyen Φ a γ görbe $\alpha = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = \beta$ osztópontokkal adott felosztása. Tekintsük a felosztáshoz tartozó integrálközelítő összeget:

$$I_\Phi = \sum_{i=1}^{n} v(r(c_i)) \cdot (r(t_i) - r(t_{i-1})), \tag{159}$$

ahol $c_i \in [t_{i-1}, t_i]$. Legyen $\epsilon > 0$ tetszőleges. A továbbiakban megmutatjuk, hogy I_Φ eltérése az állítás jobboldalának megfelelő Riemann-integrálközelítő összegtől ϵ-nál kisebb lesz, ha a Φ felosztás finomsága elegendően kicsi. A Riemann-integrál közelítéséhez válasszuk ugyanezen $t_0, t_1, \ldots, t_N$ osztópontokat és c_i pontokat.

$$\begin{aligned}\left| I_\Phi - \sum_{i=1}^{n} v(r(c_i)) \cdot \dot{r}(t_{i-1})(t_i - t_{i-1}) \right| &= \left| \sum_{i=1}^{n} v(r(c_i)) \cdot (r(t_i) - r(t_{i-1})) - \sum_{i=1}^{n} v(r(c_i)) \cdot \dot{r}(t_{i-1})(t_i - t_{i-1}) \right| \\ &\leq \sum_{i=1}^{n} |v(r(c_i))| \cdot |r(t_i) - r(t_{i-1}) - \dot{r}(t_{i-1})(t_i - t_{i-1})|.\end{aligned} \tag{160}$$

Az összeg becsléséhez felhasználjuk a Taylor-formulát:

$$|r(t_i) - r(t_{i-1}) - \dot{r}(t_{i-1})(t_i - t_{i-1})| \leq \max_{t\in[\alpha,\beta]} |\ddot{r}(t)|(t_i - t_{i-1})^2. \tag{161}$$

(Mivel az $r(t)$ $[\alpha, \beta]$-n kétszer folytonosan differenciálható, ezért a maximum létezik és véges.) A feltevés szerint a v folytonos a γ görbén, ezért létezik a

$$M := \max_{t\in[\alpha,\beta]} |v(r(t))|. \tag{162}$$

Így

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n} |v(r(c_i))| \cdot |r(t_i) - r(t_{i-1}) - \dot{r}(t_{i-1})(t_i - t_{i-1})| &\leq M \cdot \max_{t\in[\alpha,\beta]} |\ddot{r}(t)|(t_i - t_{i-1})^2 \\ &\leq M \cdot \max_{t\in[\alpha,\beta]} |\ddot{r}(t)| \cdot |\beta - \alpha| \max_i |t_i - t_{i-1}| < \epsilon,\end{aligned} \tag{163}$$

ha a γ felosztása finom felosztás.

Így tetszőleges ϵ pozitív számhoz létezik $\delta > 0$, hogy a γ görbének tetszőleges olyan Φ felosztására, amelyre $\max_i |t_i - t_{i-1}| < \delta$

$$\left| I_\Phi - \sum_{i=1}^{n} v(r(c_i)) \cdot \dot{r}(t_{i-1})(t_i - t_{i-1}) \right| < \epsilon. \tag{164}$$

Megjegyzés:
Nincs értelme görbe képhalmazán vett integrálról beszélni. Sajnos előfordulhat, hogy a görbének két különböző paraméterezése esetén a vonalintegrál különböző. Így a $\int_\gamma v(r)\,dr$ jelölés általában csak akkor korrekt, ha a feladatból egyértelműen kiderül, hogy a görbe mely paraméterezéséről van szó.

A vonalintegrál tulajdonságai

Tétel: A vonalintegrál tulajdonságai

{Fte:vonalint.tulaj}

1. A $v \mapsto \int_\gamma v(r)\,dr$ leképezés lineáris, azaz
$$\int_\gamma (v_1(r) + v_2(r))\,dr = \int_\gamma v_1(r)\,dr + \int_\gamma v_2(r)\,dr \tag{165}$$
és
$$\int_\gamma c v_1(r)\,dr = c \int_\gamma v_1(r)\,dr. \tag{166}$$
2. A $\gamma \mapsto \int_\gamma v(r)\,dr$ végesen additív leképezés, azaz ha γ_1 és γ_2 olyan görbék, hogy a γ_1 végpontja megegyezik a γ_2 kezdőpontjával, akkor
$$\int_{\gamma_1 \cup \gamma_2} v(r)\,dr = \int_{\gamma_1} v(r)\,dr + \int_{\gamma_2} v(r)\,dr. \tag{167}$$
3. $$\int_{-\gamma} v(r)\,dr = -\int_\gamma v(r)\,dr, \tag{168}$$
ahol $-\gamma$ jelenti a γ görbedarab ellentétes irányításával keletkező görbedarabot.

Vonalintegrál

{Fmi:vonalintegral}

Mintafeladat: Vonalintegrál
Határozzuk meg az u skalármező gradiensének a γ görbe menti vonalintegrálját, ahol
$$\mathrm{u}(r) = r^2 \tag{169}$$
és a γ paraméterezése
$$r(t) = a\cos(t)\vec{i} + a\sin(t)\vec{j} + bt\vec{k}, \tag{170}$$
ahol $t \in [0, 2\pi]$, a és b adott pozitív számok.

Megoldás:
Javaslat:
Határozzuk meg a skalármező gradiensét.
Lépés:
$$v(r) = \operatorname{grad} \mathrm{u}(r) = 2r. \tag{171}$$
Javaslat:
Lokalizáljuk a kapott vektormezőt az adott görbe mentén.
Lépés:
$$v(r(t)) = 2a\cos(t)\vec{i} + 2a\sin(t)\vec{j} + 2bt\vec{k}. \tag{172}$$
Javaslat:
Most határozzuk meg a görbe paraméterezésének az idő szerinti deriváltját.

Lépés:

$$\dot{r}(t) = -a\sin(t)\vec{i} + a\cos(t)\vec{j} + b\vec{k}. \tag{173}$$

Javaslat:
Számoljuk ki a skaláris szorzatot, amit később integrálni kell.
Lépés:
A skaláris szorzat:

$$\begin{aligned} v(r(t)) \cdot \dot{r}(t) &= \begin{pmatrix} 2a\cos(t) \\ 2a\sin(t) \\ 2bt \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -a\sin(t) \\ a\cos(t) \\ b \end{pmatrix} \\ &= -2a^2\cos(t)\sin(t) + 2a^2\sin(t)\cos(t) + 2b^2t = 2b^2t. \end{aligned} \tag{174}$$

Javaslat:
Számítsuk ki az integrált.
Lépés:

$$\int_\gamma v(r)\,dr = \int_0^{2\pi} v(r(t)) \cdot \dot{r}(t)\,dt = \int_0^{2\pi} 2b^2t\,dt = \left[2b^2\frac{t^2}{2}\right]_0^{2\pi} = 4b^2\pi^2. \tag{175}$$

Gravitáció {Fmi:gravitacio}

Mintafeladat:
Gravitáció Határozzuk meg az u skalármező gradiensének a γ görbe menti integrálját, ahol

$$\mathrm{u}(r) = \frac{1}{|r|} \tag{176}$$

és a γ görbe legyen két adott A és B térbeli pontokat összekötő szakasz, amely A-ból B-be van irányítva, és nem halad át az origón.

Megoldás:
Javaslat:
Paraméterezzük a térbeli szakaszt.
Lépés:
Legyen a illetve b az A-ba és B-be mutató vektor. Ekkor

$$r(t) = a + (b-a)t, \tag{177}$$

ahol $t \in [0, 1]$.
Javaslat:
Írjuk fel az u skalármező gradiensét.
Lépés:

$$v(r) = \operatorname{grad} \mathrm{u}(r) = \operatorname{grad}\left((r^2)^{-\frac{1}{2}}\right) = -\frac{1}{2}(r^2)^{-\frac{3}{2}} \cdot 2r = -\frac{r}{|r|^3}. \tag{178}$$

Javaslat:
Lokalizáljuk a kapott vektormezőt az adott görbe mentén.
Lépés:

$$v(r(t)) = -\frac{a + (b-a)t}{((a + (b-a)t)^2)^{\frac{3}{2}}}. \tag{179}$$

Javaslat:
Most határozzuk meg a görbe paraméterezésének az idő szerinti deriváltját.
Lépés:

$$\dot{r}(t) = b - a \tag{180}$$

Javaslat:
Számoljuk ki a skaláris szorzatot, amit később integrálni kell.
Lépés:

$$v(r(t))\cdot\dot{r}(t) = -\frac{a+(b-a)t}{((a+(b-a)t)^2)^{\frac{3}{2}}}\cdot(b-a) = -\frac{a(b-a)+(b-a)^2t}{(a^2+2a(b-a)t+(b-a)^2t^2)^{\frac{3}{2}}}. \tag{181}$$

Javaslat:
Számítsuk ki az integrált.
Lépés:

$$\begin{aligned}\int_\gamma v(r)\,dr &= \int_0^1 v(r(t))\cdot\dot{r}(t)\,dt \\ &= \int_0^1 -\frac{a(b-a)+(b-a)^2t}{(a^2+2a(b-a)t+(b-a)^2t^2)^{\frac{3}{2}}}\,dt\end{aligned}$$

(Első pillantásra egy kicsit problémásnak tűnik, de ha alaposabban megnézzük, akkor láthatjuk, hogy ez $\frac{f'}{f^{\frac{3}{2}}}$ típusú alapintegrál.)

$$\begin{aligned}&= \left[-\frac{\frac{1}{2}(a^2+2a(b-a)t+(b-a)^2t^2)^{-\frac{1}{2}}}{-\frac{1}{2}}\right]_0^1 \\ &= (b^2)^{-\frac{1}{2}} - (a^2)^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{|b|} - \frac{1}{|a|} = \mathrm{u}(b) - \mathrm{u}(a).\end{aligned} \tag{182}$$

2.2. Felületi integrál

E lecke befejezése után a hallgató:

- érti a felületi integrál fogalmát és ismeri a tulajdonságait,
- ki tudja számítani egy vektor-vektor függvénynek adott felületre vonatkozó felületi integrálját.

Egyszerű felület

Megjegyzés:
A továbbiakban felület alatt mindig valamely kétparaméteres vektor-skalár függvénnyel paraméterezett felületet értünk.

Definíció: Egyszerű felület
Azt mondjuk, hogy az $r : T \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ függvénnyel paraméterezett F felület **egyszerű felületdarab**, ha {Fde:egyszeru.felulet}

1. $T \subseteq \mathbb{R}^2$ nyílt és összefüggő,
2. r homeomorfizmus, azaz $r : T \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ olyan folytonos bijekció T és $r(T)$ között, amelynek az inverze is folytonos.

Reguláris felület

Definíció: Reguláris felület
Azt mondjuk, hogy az $r : T \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ függvénnyel paraméterezett egyszerű F felület **irányított, reguláris felületdarab**, ha {Fde:regularis.feluletdarab}

1. r kétszer folytonosan differenciálható
2. $r'_u \times r'_v \neq 0$ a $T \subseteq \mathbb{R}^2$-en,
3. a felület minden pontjához egyértelműen hozzárendelhető a normális egységvektora, a két lehetséges iránya közül ki van jelölve az egyik minden pontban úgy, hogy a normál egységvektor – mint a hely függvénye – az egész felületen folytonos.

Megjegyzések:

- Meggondolható, hogy reguláris felület egy pontján áthaladó összes felületi görbe e pontbeli érintője egy közös síkban, az adott ponton áthaladó $r'_u \times r'_v$ normálvektorú síkban van, ami a feltétel szerint nem nullvektor. Ez az adott pontban vett felületi normálvektor.
- Létezik nem irányítható felület, erre nevezetes példa ún. Möbius-szalag. E felület egy tetszőleges P pontjában tetszőlegesen kijelölve a normál egységvektor irányát, felületen körbehaladva, a P pontba visszaérve az eredetivel ellenkező irányú normál egységvektort kapunk.
- Megmutatható, hogy a gömbfelület nem egyszerű felületdarab. Ilyen és hasonló zárt felületeket nem szeretnénk kirekeszteni a tárgyalásból, így kiterjesztjük a felület fogalmát.

Definíció:
Az $F \subseteq \mathbb{R}^3$ részhalmaz **reguláris felület**, ha léteznek $F_1, \dots, F_n$ reguláris felületdarabok úgy, hogy {Fde:regularis.felulet}

1. $F = \bigcup_{i=1}^n F_i$,
2. $\bigcap_{i \in I} F_i$ reguláris felületdarab minden $I \subseteq \{1, 2, \dots, n\}$ esetén,
3. F összefüggő,
4. ha F adott pontja több F_i felületdarabnak is pontja, akkor ezen pontok között létezek ún. megengedett paramétertranszformációk, azaz ha

$$F_i = \left\{ r^i(u^i, v^i) : (u^i, v^i) \in T_i \right\} \tag{183}$$

$$F_j = \left\{ r^j(u^j, v^j) : (u^j, v^j) \in T_j \right\} \tag{184}$$

a paraméterezések és $r^i(a_1, a_2) = r^j(b_1, b_2)$, $((a_1, a_2) \in T_i$, $(b_1, b_2) \in T_2)$, akkor a (b_1, b_2)-nek létezik olyan környezete, amelyben az (u^j, v^j)-ről az (u^i, v^i)-re való paramétezerzésre áttérés esetén a leképezés bijektív, kétszer folytonosan differenciálható és a függvényrendszer Jacobi-determinánsa nem 0,

5. az F felület irányítható, azaz minden pontjához hozzárendelhető a normál egységvektora úgy, hogy a normál egységvektor mint a hely függvénye az egész felületen folytonos legyen.

Definíció:
Egy reguláris F felület **zárt**, ha F az $\mathbb{R}^3$ teret V_1 és V_2 térrészre bontja úgy, hogy {Fde:zart.felulet}

1. $V_1 \cup F \cup V_2 = \mathbb{R}^3$
2. $V_1 \cap F = V_2 \cap F = V_1 \cap V_2 = \emptyset$
3. $V_1 \cup V_2$ nem összefüggő
4. V_1 és V_2 összefüggő, és pontosan az egyik korlátos.

Megjegyzés:
A gömbfelület egyszerű zárt felület.

Vektormező felületi integrálja

Megjegyzések:

- Tekintsük az alábbi fizikai modellt: Jelölje $v(r)$ egy áramló folyadék sebességmezőjét, azaz a tér r helyvektorához hozzárendeljük a megfelelő folyadékrészecske $v(r)$ sebességvektorát. Helyezzünk a folyadék útjába egy F felületdarabot és vizsgáljuk, hogy azon egységnyi idő alatt mennyi folyadékmennyiség lép át. Osszuk fel a felületdarabot „kellően finom” F_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$ kicsiny felületdarabokra. Életszerű feltenni, hogy a sebességmező folytonos. Rendeljük hozzá az F_i felületelem minden pontjához a felületelem adott r_i pontjához tartozó $v(r_i)$ sebességvektorát. A $v(r)$ folytonossága miatt a felületelem többi pontjához tartozó sebességvektorok ettől csak kicsit fognak eltérni. A felületelemen dt idő alatt áthaladó folyadékrészecskék egy ferde hasábnak tekinthető testet fognak kitölteni. Látható, hogy ennek a ferde hasábnak a térfogata az alábbi skalárszorzat:
$$(v(r_i) \cdot m_i)\, dt, \tag{185}$$
ahol m_i az r_i-hez tartozó normálvektor. Ezen mennyiség előjele aszerint változik, hogy a folyadék a normális irányában, vagy a normálissal ellentétes irányban lépi-e át az F_i felületet. Így egész F felületen dt idő alatt átáramlott folyadékmennyiség előjeles összege közelítőleg:
$$\sum_{i=1}^{n} (v(r_i) \cdot m_i)\, dt, \tag{186}$$

azaz egységnyi idő alatt az egész F felületen átáramlott folyadékmennyiség előjeles összege közelítőleg

$$\sum_{i=1}^{n} v(r_i) \cdot m_i. \tag{187}$$

A fenti mennyiség azt adja meg, hogy az felületen időegység alatt mennyivel több folyadék halad át a normális irányában, mint az ellenkező irányban.

- Tekintsük az alábbi matematikai modellt: Legyen adott F egy $r = r(u, v)$, $(u, v) \in T \subseteq \mathbb{R}^2$ paraméterezéssel irányított reguláris felületdarab, és az ezen értelmezett $v(r)$ folytonos vektormező. Vegyük az F felület egy „kellően finom" $\{F_i\}$ Jordan-mérhető felületekre való felosztását, azaz legyen

$$F = \bigcup_{i=1}^{n} F_i. \tag{188}$$

Minden egyes felületdarab belsejében jelöljünk ki egy $r_i \in F_i$ pontot. Jelölje $\vec{m}_i$ ezen felület r_i-beli normális egységvektorát és jelölje $\vec{F}_i = \lambda(F_i) \cdot \vec{m}_i$ az F_i-hez tartozó ún. felszínvektort. A felszínvektor hossza tehát az F_i felületdarab felszíne, iránya merőleges az F_i felületdarabra, így állása jellemző a felületdarab állására. Tekintsük az

$$v(r_i) \cdot \vec{F}_i \tag{189}$$

skaláris szorzatot. Ezt minden felületelemen végrehajtva kapjuk az F felület adott felosztásához tartozó összeget:

$$\sum_{i=1}^{n} v(r_i) \cdot \vec{F}_i. \tag{190}$$

Ha a felosztást minden határon túl finomítjuk, akkor

$$\lim_{n \to \infty} \sum_{i=1}^{n} v(r_i) \cdot \vec{F}_i \tag{191}$$

határérték létezik és véges.

Definíció: Vektormező felületi integrálja

Legyen $T \subseteq \mathbb{R}^2$ Jordan-mérhető tartomány, {Fde:vektormezo.feluleti.int

$$F = \{r(u, v) : (u, v) \in T\} \tag{192}$$

irányított, reguláris felületdarab, és $v(r)$ ezen értelmezett folytonos vektormező. A $v(r)$ vektormező F felületen vett **felületi integrálját** a következőképpen definiáljuk:

$$\iint_F v(r)\, dF = \iint_T v(r(u, v)) \cdot (r'_u \times r'_v)\, dT. \tag{193}$$

Ezt az értéket a $v(r)$ vektormező F-re vonatkozó **fluxusának** is nevezzük. Ha F zárt reguláris felület, akkor az F-re vonatkozó felületi integrált a következőképpen jelöljük:

$$\oiint_F v(r)\, dF. \tag{194}$$

Megjegyzések:

- A felület minden esetben a normálvektor állásával irányított felület.
- A felületi integrált a felület paraméterezésével definiáltuk, ezért látszólag függ a felület paraméterezésétől. Megmutatható, hogy a definíciónak megfelelő paraméterezésre nézve a felületi integrál invariáns.

Invarianciatétel

Tétel: Invarianciatétel
Az F irányított reguláris felületdarabon értelmezett $v(r)$ folytonos vektormező felületi integráljának értéke független a paraméterezéstől, ez az érték a felületi normálvektor irányítását megőrző paraméter-transzformációval szemben invariáns. {Fte:invariancia.tetel}

Bizonyítás:
Tekintsük az F felületnek két különböző paraméterezését:

$$F = \{p(u, v) : (u, v) \in T_1\} = \{q(r, s) : (r, s) \in T_2\} . \tag{195}$$

Tegyük fel, hogy ezen és paraméterezések reguláris felületet állítanak elő. Tekintsünk egy paraméter-transzformációt, azaz az (u, v) paraméterezésről a másik, (r, s) paraméterezésre való áttérést, ahol a T_2 bijektív módon ráképezhető a T_1-re, a leképezést megvalósító

$$u(r, s), v(r, s) \tag{196}$$

függvények háromszor folytonosan differenciálhatók és e függvényrendszer deriválttenzorának a determinánsa, a Jacobi-determináns nem zérus a T_2-n. Legyen a fenti jelölésekkel

$$q = q(r, s) = p(u(r, s), v(r, s)). \tag{197}$$

A többes integrál transzformációs képlete alapján:

$$\begin{aligned}\iint_{T_2} v(q(r, s)) \cdot (q'_r \times q'_s)\, dr\, ds &= \iint_{T_2} v(q(r, s)) \cdot (p'_u \times p'_v) \frac{\partial(u, v)}{\partial(r, s)}\, dr\, ds \\ &= \pm \iint_{T_1} v(p(u, v)) \cdot (p'_u \times p'_v)\, du\, dv,\end{aligned} \tag{198}$$

aszerint, hogy a paraméter transzformációt megvalósító leképezés Jacobi determinánsa pozitív vagy negatív. Itt felhasználtuk, hogy (a fenti jelölésekkel)

$$q'_r = p'_u \cdot \frac{\partial u}{\partial r} + p'_v \cdot \frac{\partial v}{\partial r} \tag{199}$$

$$q'_s = p'_u \cdot \frac{\partial u}{\partial s} + p'_v \cdot \frac{\partial v}{\partial s}. \tag{200}$$

Így kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} q'_r \times q'_s &= \left(p'_u \cdot \frac{\partial u}{\partial r} + p'_v \cdot \frac{\partial v}{\partial r}\right) \times \left(p'_u \cdot \frac{\partial u}{\partial s} + p'_v \cdot \frac{\partial v}{\partial s}\right) \\ &= (p'_u \times p'_v) \frac{\partial u}{\partial r}\frac{\partial v}{\partial s} + (p'_v \times p'_u) \frac{\partial u}{\partial s}\frac{\partial v}{\partial r} \\ &= (p'_u \times p'_v) \left(\frac{\partial u}{\partial r}\frac{\partial v}{\partial s} - \frac{\partial u}{\partial s}\frac{\partial v}{\partial r}\right) \\ &= (p'_u \times p'_v) \frac{\partial(u,v)}{\partial(r,s)}. \end{aligned} \tag{201}$$

Felületi integrál tulajdonságai

Tétel: Felületi integrál tulajdonságai

Vektormező felületi integrálja rendelkezik a következő tulajdonságokkal: {Fte:feluleti.int.tul}

1. A $v \mapsto \iint_F v(r)\,dF$ leképezés lineáris, azaz
$$\iint_F (v_1(r) + v_2(r))\,dF = \iint_F v_1(r) + \iint_F v_2(r)\,dF \tag{202}$$
$$\iint_F cv(r)\,dF = c\iint_F v(r)\,dF. \tag{203}$$

2. Az $F \mapsto \iint_F v(r)\,dF$ leképezés végesen additív, azaz ha az F irányított felületet két részre, F_1 és F_2-re bontjuk, akkor F és F_1 illetve F és F_2 egyező irányítása esetén
$$\iint_{F_1 \cup F_2} v(r)\,dF = \iint_{F_1} v(r)\,dF + \iint_{F_2} v(r)\,dF. \tag{204}$$

3. Jelölje $-F$ az F felületi normálvektor irányításának ellenkezőre változtatásával keletkező irányított felületet. Ekkor
$$\iint_F v(r)\,dF = -\iint_{-F} v(r)\,dF. \tag{205}$$

Felületi integrál

{Fmi:feluleti.integral}

Mintafeladat: Felületi integrál

Számítsuk ki a következő $v(r)$ vektormezők adott F felületen vett integrálját!

1. Vektormező:
$$v(r) = r \tag{206}$$
Felület:
$$F = \left\{(x,y,z) : x^2 + y^2 + z^2 = 1, z \geq 0\right\} \tag{207}$$
A normálvektor lefelé mutasson.

2. Vektormező:
$$v(r) = 2r \tag{208}$$
Felület:
$$F = \left\{(x,y,z) : x^2 + y^2 = 1, -1 \leq z \leq 1\right\} \cup \left\{(x,y,z) : x^2 + y^2 \leq 1, |z| = 1\right\} \tag{209}$$
kifelé mutató normálvektor irányítással.

Megoldás:

1. *Javaslat:*
   Írjuk fel a vektormezőt Descartes koordináta-rendszerben.
   Lépés:
   $$v(r) = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}. \tag{210}$$
   Javaslat:
   Paraméterezzük a felületet (1 sugarú felső félgömb, amelynek az alapköre a $z = 0$ síkon van).
   Lépés:
   $$r(u, v) = \sin(u)\cos(v)\vec{i} + \sin(u)\sin(v)\vec{j} + \cos(u)\vec{k}, \tag{211}$$
   ahol
   $$(u, v) \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \times [0, 2\pi] \tag{212}$$
   Javaslat:
   Kiszámítjuk a felület paraméterezését leíró vektor-skalár függvény parciális deriváltjainak keresztszorzatát.
   Lépés:
   $$r'_u(u, v) = \cos(u)\cos(v)\vec{i} + \cos(u)\sin(v)\vec{j} - \sin(u)\vec{k} \tag{213}$$
   $$r'_v(u, v) = -\sin(u)\sin(v)\vec{i} + \sin(u)\cos(v)\vec{j} + 0\vec{k} \tag{214}$$
   $$\begin{aligned} r'_u(u, v) \times r'_v(u, v) &= \det\begin{pmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \cos(u)\cos(v) & \cos(u)\sin(v) & -\sin(u) \\ -\sin(u)\sin(v) & \sin(u)\cos(v) & 0 \end{pmatrix} \\ &= \sin^2(u)\cos(v)\vec{i} + \sin^2(u)\sin(v)\vec{j} + \sin(u)\cos(u)\vec{k}. \end{aligned} \tag{215}$$
   Javaslat:
   Vizsgáljuk meg a felületi normálvektor irányítását!
   Lépés:
   Mivel az $u \in [0, \frac{\pi}{2}]$, ezért a felületi normálvektor felfelé mutat. A „jó” lefelé mutató normálvektor
   $$n \equiv -r'_u(u, v) \times r'_v(u, v) = -\sin^2(u)\cos(v)\vec{i} - \sin^2(u)\sin(v)\vec{j} - \sin(u)\cos(u)\vec{k}. \tag{216}$$
   Javaslat:
   Lokalizáljuk a vektormezőt a felületen.
   Lépés:
   $$v(r(u, v)) = \sin(u)\cos(v)\vec{i} + \sin(u)\sin(v)\vec{j} + \cos(u)\vec{k}. \tag{217}$$
   Javaslat:
   Most számítsuk ki a skaláris szorzatot.

Lépés:

$$\begin{aligned}
v(r(u,v)) \cdot (r'_u(u,v) \times r'_v(u,v)) &= (\sin(u)\cos(v)\vec{i} + \sin(u)\sin(v)\vec{j} + \cos(u)\vec{k}) \cdot (-\sin^2(u)\cos(v)\vec{i} - \sin^2 \\
&= -\sin^3(u)\cos^2(v) - \sin^3(u)\sin^2(v) - \sin(u)\cos^2(u) \\
&= -\sin^3(u) - \sin(u)\cos^2(u) \\
&= -\sin(u).
\end{aligned} \tag{218}$$

Javaslat:
Számítsuk ki az integrált.

Lépés:

$$\iint_F v(r)\, dF = \int_0^{2\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} -\sin(u)\, du\, dv = -\int_0^{2\pi} 1\, dv \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(u)\, du = -2\pi. \tag{219}$$

2. *Javaslat:*
Számoljuk ki a hengert alkotó felületeken vett felületi integrálokat és adjuk őket össze.

Javaslat:
Adjuk meg a hengert alkotó felületek paraméterezéseit.

Lépés:
$F^{\text{fedőlap}}$:

$$r(u,v) = u\cos(v)\vec{i} + u\sin(v)\vec{j} + 1\vec{k} \qquad (u,v) \in [0,1] \times [0,2\pi] \tag{220}$$

F^{alaplap}:

$$r(u,v) = u\cos(v)\vec{i} + u\sin(v)\vec{j} - 1\vec{k} \qquad (u,v) \in [0,1] \times [0,2\pi] \tag{221}$$

$F^{\text{palást}}$:

$$r(u,v) = \cos(u)\vec{i} + \sin(u)\vec{j} + v\vec{k} \qquad (u,v) \in [0,2\pi] \times [-1,1]. \tag{222}$$

Javaslat:
Számítsuk ki a hengert alkotó megfelelő felületdarabok paraméterezésében szereplő kétparaméteres vektor-skalár függvény megfelelő parciális deriváltjait, majd ezek vektoriális szorzatait.

Lépés:
$F^{\text{fedőlap}}$ esetén:

$$r'_u(u,v) = \cos(v)\vec{i} + \sin(v)\vec{j} + 0\vec{k} \tag{223}$$
$$r'_v(u,v) = -u\sin(v)\vec{i} + u\cos(v)\vec{j} + 0\vec{k}, \tag{224}$$

így

$$r'_u(u,v) \times r'_v(u,v) = \det \begin{pmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \cos(v) & \sin(v) & 0 \\ -u\sin(v) & u\cos(v) & 0 \end{pmatrix} = 0\vec{i} + 0\vec{j} + u\vec{k}. \tag{225}$$

A fedőlap normálvektor irányítása megfelelő, ugyanis $u \in [0,1]$.

F^{alaplap} esetén:

$$r'_u(u,v) = \cos(v)\vec{i} + \sin(v)\vec{j} + 0\vec{k} \tag{226}$$
$$r'_v(u,v) = -u\sin(v)\vec{i} + u\cos(v)\vec{j} + 0\vec{k}, \tag{227}$$

így

$$r'_u(u,v) \times r'_v(u,v) = \det \begin{pmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \cos(v) & \sin(v) & 0 \\ -u\sin(v) & u\cos(v) & 0 \end{pmatrix} = 0\vec{i} + 0\vec{j} + u\vec{k}. \tag{228}$$

Az alaplap normálvektor irányítása nem megfelelő, ugyanis $u \in [0,1]$ miatt ez felfelé mutat. A „jó” normálvektor

$$n = 0\vec{i} + 0\vec{j} - u\vec{k}. \tag{229}$$

$F^{\text{palást}}$ esetén:

$$r'_u(u,v) = -\sin(v)\vec{i} + \cos(u)\vec{j} + 0\vec{k} \tag{230}$$
$$r'_v(u,v) = 0\vec{i} + 0\vec{j} + 1\vec{k}, \tag{231}$$

így

$$r'_u(u,v) \times r'_v(u,v) = \det \begin{pmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -\sin(u) & \cos(u) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \cos(u)\vec{i} + \sin(u)\vec{j} + 0\vec{k}. \tag{232}$$

A palást normálvektor irányítása megfelelő.

Javaslat:

Lokalizáljuk a vektormezőt a megfelelő felületdarabokra.

Lépés:

$$F^{\text{fedőlap}} : v(r(u,v)) = 2u\cos(v)\vec{i} + 2u\sin(v)\vec{j} + 2\vec{k} \tag{233}$$
$$F^{\text{alaplap}} : v(r(u,v)) = 2u\cos(v)\vec{i} + 2u\sin(v)\vec{j} - 2\vec{k} \tag{234}$$
$$F^{\text{palást}} : v(r(u,v)) = 2\cos(u)\vec{i} + 2\sin(u)\vec{j} + 2v\vec{k}. \tag{235}$$

Javaslat:

Határozzuk meg az integrálandó skaláris szorzatotokat.

Lépés:

$F^{\text{fedőlap}}$ esetén:

$$v(r(u,v)) \cdot (r'_u(u,v) \times r'_v(u,v)) = (2u\cos(v)\vec{i} + 2u\sin(v)\vec{j} + 2\vec{k})(0\vec{i} + 0\vec{j} + u\vec{k}) = 2u. \tag{236}$$

F^{alaplap} esetén:

$$v(r(u,v)) \cdot (r'_u(u,v) \times r'_v(u,v)) = (2u\cos(v)\vec{i} + 2u\sin(v)\vec{j} - 2\vec{k})(0\vec{i} + 0\vec{j} - u\vec{k}) = 2u. \tag{237}$$

$F^{\text{palást}}$ esetén:

$$v(r(u,v))\cdot(r'_u(u,v)\times r'_v(u,v)) = (2\cos(u)\vec{i} + 2\sin(u)\vec{j} + 2v\vec{k})(\cos(u)\vec{i} + \sin(u)\vec{j} + 0\vec{k}) = 2. \tag{238}$$

Javaslat:
Végezzük el az integrálásokat.

Lépés:
A hengerfelületen vett felületi integrál a felületet alkotó részfelületeken vett felületi integrálok összege.

$$\begin{aligned}\oint\!\!\oint_F v(r)\,dF &= \iint_{F^{\text{fedőlap}}} v(r)\,dF + \iint_{F^{\text{alaplap}}} v(r)\,dF + \iint_{F^{\text{palást}}} v(r)\,dF \\ &= \int_0^{2\pi}\int_0^1 2u\,du\,dv + \int_0^{2\pi}\int_0^1 2u\,du\,dv + \int_{-1}^1\int_0^{2\pi} 2\,du\,dv \\ &= 2\pi\cdot 1 + 2\pi\cdot 1 + 2\cdot 4\pi = 12\pi.\end{aligned} \tag{239}$$

Felszín szerinti integrál

Megjegyzés:
A $v(r)$ vektormező felületi integráljához hasonlóan értelmezni lehet az $\mathrm{u}(r)$ skalár-vektor függvény felületre vonatkozó „felszín szerinti” vagy felszíni integrálját. Ehhez az integrálfogalomhoz a következő módon juthatunk el:

Definíció: Felszín szerinti integrál
Legyen $T \subseteq \mathbb{R}^2$ adott Jordan-mérhető tartomány, $F = \{r(p,q) : (p,q) \in T\}$ {Fde:felszin.szerinti.int} reguláris felületdarab és $\mathrm{u} = \mathrm{u}(r)$ ezen értelmezett folytonos skalár-vektor függvény. Tekintsük az F felület egy F_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$ felosztását, jelöljünk ki minden F_i felületdarabon egy r_i pontot. Ha az F felosztása minden határon túl finomodó, akkor

$$\sum_{i=1}^{n} \mathrm{u}(r_i)\lambda(F_i) \tag{240}$$

összeg határértékét nevezzük az $\mathrm{u}(r)$ skalár-vektor függvény F-re vonatkozó **felszín szerinti integráljának**. A felszín szerinti integrál jelölése

$$\iint_F \mathrm{u}(r)\,dF. \tag{241}$$

Megjegyzés:
Legyen $T \subseteq \mathbb{R}^2$ adott Jordan-mérhető tartomány, $F = \{r(p,q) : (p,q) \in T\}$ reguláris felületdarab és $\mathrm{u}(r)$ ezen értelmezett folytonos skalár-vektor függvény. Ekkor

$$\iint_F \mathrm{u}(r)\,dF = \iint_T \mathrm{u}(r(p,q))\cdot|r'_p \times r'_q|\,dT. \tag{242}$$

2.3. Potenciálelmélet

E lecke befejezése után a hallgató:

- megismerkedik a potenciálfüggvény fogalmával, tulajdonságaival,
- ki tudja számítani adott vektormezőnek egy (létező) potenciálfüggvényét,
- ismer szükséges és elégséges feltételt potenciálfüggvény létezésére,
- ismeri a vonalintegrál és a potenciálfüggvény kapcsolatát.

Potenciálfüggvény

Definíció: Potenciálfüggvény
Azt mondjuk, hogy a $v(r)$ folytonos vektor-vektor függvény a tér $D \subseteq \mathbb{R}^3$ nyílt összefüggő halmazán **potenciálos**, ha van olyan $\mathrm{u}(r)$ folytonosan deriválható skalár-vektor függvény, melyre {Fde:potencialfuggv}

$$v(r) = \operatorname{grad} \mathrm{u}(r) \qquad (r \in D). \tag{243}$$

Ezt az $\mathrm{u}(r)$ skalár-vektor függvényt a $v(r)$ vektor-vektor függvény **potenciálfüggvényének** nevezzük.

Megjegyzések:

- Mivel a konstans függvény gradiense (deriváltja) zérus, ezért ha $\mathrm{u}(r)$ potenciálfüggvénye a $v(r)$-nek, akkor tetszőleges c állandóra $\mathrm{u}(r)+c$ is potenciálfüggvény. Így, ha létezik egy vektor-vektor függvénynek potenciálfüggvénye, akkor végtelen sok is létezik. Bármely kettő különbsége konstans.
- A potenciálfüggvény fenti definíciója tulajdonképpen az egyváltozós primitív függvény általánosítása több dimenzióra, ugyanis egy skalár-vektor függvény gradiense ezen függvény deriváltja.

Definíció: Konzervatív vektormező
Azt mondjuk, hogy a $v(r)$ $(r \in D \subseteq \mathbb{R}^2)$ folytonos vektor-vektor függvény **konzervatív** egy nyílt $V \subseteq D$ tartományban, ha bármely $\gamma \subseteq V$ (irányított) zárt görbén vett vonalintegrálja a $v(r)$-nek zérus. {Fde:konzerv.vektormezo}

Szükséges és elégséges feltétel konzervatív vektormezőre

Tétel: Szükséges és elégséges feltétel konzervatív vektormezőre
A $v(r)$ $(r \in D \subseteq \mathbb{R}^3)$ folytonos vektor-vektor függvény konzervatív egy nyílt, összefüggő $V \subseteq D \subseteq \mathbb{R}^3$ tartományban pontosan akkor, ha V-ben a vonalintegrál az útvonaltól független, ennek az értéke csak a kezdő és végponttól függ. {Fte:szuks.elegs.konzerv.vek

Bizonyítás:
I. Tegyük fel, hogy a $v(r)$ $(r \in D \subseteq \mathbb{R}^3)$ folytonos vektor-vektor függvény konzervatív egy nyílt, összefüggő $V \subseteq D \subseteq \mathbb{R}^3$ tartományban. Legyen $a, b \in V$ tetszőleges adott pont és jelöljön $\gamma_1, \gamma_2 \subseteq V$ tetszőleges két olyan irányított görbét, melyeknek kezdőpontja a és a végpontja b. Ekkor a $\gamma_1 \cup (-\gamma_2) \subseteq V$ zárt görbe.

A $v(r)$ konzervatív tulajdonsága és a vonalintegrál tulajdonságai miatt:

$$\begin{aligned} 0 &= \oint_{\gamma_1 \cup (-\gamma_2)} v(r)\, dr \\ &= \int_{\gamma_1} v(r)\, dr + \int_{-\gamma_2} v(r)\, dr \\ &= \int_{\gamma_1} v(r)\, dr - \int_{\gamma_2} v(r)\, dr, \end{aligned} \tag{244}$$

azaz

$$\int_{\gamma_1} v(r)\, dr = \int_{\gamma_2} v(r)\, dr. \tag{245}$$

II. Tegyük fel, hogy a $v(r)$ $(r \in D \subseteq \mathbb{R}^3)$ folytonos vektor-vektor függvény esetén egy nyílt, összefüggő $V \subseteq D \subseteq \mathbb{R}^3$ tartományban a vonalintegrál az útvonaltól független, az értéke csak a kezdő és végponttól függ.

Legyen $\gamma \subseteq V$ tetszőleges irányított, zárt görbe és legyen $a, b \in \gamma$ tetszőleges adott pont. Jelölje $\gamma_1 \subseteq V$ azt az irányított görbét, melyeknek kezdőpontja a és a végpontja b és a γ_2 azt az irányított görbét, melyeknek kezdőpontja b és a végpontja a. Ekkor $\gamma = \gamma_1 \cup \gamma_2$. Ekkor a feltétel szerint:

$$\int_{\gamma_1} v(r)\, dr = \int_{-\gamma_2} v(r)\, dr. \tag{246}$$

Így

$$\begin{aligned} 0 &= \int_{\gamma_1} v(r)\, dr - \int_{-\gamma_2} v(r)\, dr \\ &= \int_{\gamma_1} v(r)\, dr + \int_{\gamma_2} v(r)\, dr \\ &= \oint_{\gamma} v(r)\, dr. \end{aligned} \tag{247}$$

Newton–Leibniz-formula

Tétel: Newton–Leibniz-formula 1
A $v(r)$ $(r \in D \subseteq \mathbb{R}^3)$ folytonos vektor-vektor függvény konzervatív egy nyílt, összefüggő $V \subseteq D \subseteq \mathbb{R}^3$ tartományban pontosan akkor, ha $v(r)$ potenciálos. {Fte:Newton.Leibniz.form.1}

Bizonyítás:
I. Tegyük fel, hogy $v(r)$ potenciálos V-ben. Ekkor létezik olyan $\mathrm{u} = \mathrm{u}(r)$ skalármező, hogy

$$v(r) = \operatorname{grad} \mathrm{u}(r). \tag{248}$$

Tekintsünk egy tetszőleges $\gamma = \{r(t) : t \in [\alpha, \beta]\}$ irányított, kétszer folytonosan differenciálható térgörbét, amelynek a kezdőpontja $a = r(\alpha)$ és a végpontja $b = r(\beta)$. Ekkor

$$\int_\gamma v(r)\, dr = \int_\alpha^\beta \operatorname{grad} \mathrm{u}(r(t)) \cdot \dot{r}(t)\, dt$$

kompozíció függvény deriválási szabálya miatt

$$= \int_\alpha^\beta \frac{d\mathrm{u}(r(t))}{dt}\, dt = [\mathrm{u}(r(t))]_\alpha^\beta = \mathrm{u}(r(\beta)) - \mathrm{u}(r(\alpha)) = \mathrm{u}(b) - \mathrm{u}(a). \tag{249}$$

Így a $v(r)$ konzervatív vektor-vektor függvény, ugyanis a vonalintegrál az útvonaltól független, ennek az értéke csak a kezdő és végponttól függ.

II. Tegyük fel, hogy a $v(r)$ $(r \in D \subseteq \mathbb{R}^3)$ folytonos vektor-vektor függvény konzervatív egy nyílt, összefüggő $V \subseteq \mathbb{R}^3$ tartományban. Legyen $\gamma \subseteq D$ tetszőleges $a \in V$ kezdőpontú $r \in V$ végpontú $r(t)$ kétszer folytonosan differenciálható görbe. Ekkor az

$$\mathrm{u}(r) = \int_\gamma v(r)\, dr \tag{250}$$

vonalintegrál a $v(r)$ konzervatív tulajdonsága miatt független a γ_r görbétől, csak r-től függ, így egy skalár-vektor függvényt definiál.

Megmutatjuk, hogy az $\mathrm{u}(r)$ a $v(r)$ egy potenciálfüggvénye. Legyen $r_0 \in V$ és jelölje $K_{r_0} \subseteq V$ az r_0 gömbi környezetét, valamint legyen h olyan pont, amelyre $r_0 + h \in K_{r_0}$. Ekkor

$$\mathrm{u}(r_0 + h) - \mathrm{u}(r_0) = \int_a^{r_0+h} v(r)\, dr - \int_a^{r_0} v(r)\, dr = \int_{r_0}^{r_0+h} v(r)\, dr. \tag{251}$$

A vonalintegrál értéke független az úttól, válasszuk az r_0 kezdőpontú és $r_0 + h$ végpontú térbeli szakaszt. Ennek egy paraméterezése

$$r(t) = r_0 + ht \qquad t \in [0, 1]. \tag{252}$$

Így

$$\int_{r_0}^{r_0+h} v(r)\, dr = \int_0^1 v(r_0 + ht) \cdot h\, dt. \tag{253}$$

Az integrálszámítás középértéktétele miatt létezik $0 < \xi < 1$ szám, hogy

$$\mathrm{u}(r_0 + h) - \mathrm{u}(r_0) = v(r_0 + h\xi)h. \tag{254}$$

A v folytonossága miatt

$$v(r_0 + h\xi) = v(r_0) + \varepsilon(h), \tag{255}$$

ahol $\varepsilon(h) \to 0$, ha $h \to 0$. Következésképpen

$$\mathrm{u}(r_0 + h) - \mathrm{u}(r_0) + v(r_0 + h\xi)h = v(r_0)h + \varepsilon(h)h, \tag{256}$$

ahol $\varepsilon(h) \to 0$, ha $h \to 0$, azaz $\mathrm{u}(r)$ differenciálható és $v(r_0) = \operatorname{grad} \mathrm{u}(r_0)$.

Megjegyzés:
A tétel fizikai tartalma a következő: ha egy erőtérben az erőt definiáló vektor-vektor függvénynek van potenciálfüggvénye (primitív függvénye), akkor bármely folytonos és rektifikálható görbe mentén végzett munka csak a görbe kezdő- és végpontjától függ, és értéke a potenciálfüggvény e két pont közötti megváltozása.

Tétel: Newton–Leibniz-formula 2
Legyen $D \subseteq \mathbb{R}^3$ nem üres nyílt halmaz. Legyen a $v(r)$ $(r \in D \subseteq \mathbb{R}^3)$ folytonos vektor-vektor függvény potenciálfüggvénye az $\mathrm{u}(r)$ $(r \in D)$ skalármező. Ekkor minden $r = r(t)$ $(t \in [\alpha, \beta])$, $r([\alpha, \beta]) \subseteq D$ folytonos, rektifikálható görbe esetén {Fte:Newton.Leibniz.form.2}

$$\int_\gamma v(r)\, dr = \mathrm{u}(r(\beta)) - \mathrm{u}(r(\alpha)). \tag{257}$$

Bizonyítás:
(Meghaladja e jegyzet kereteit. Lsd. pl. T. Soós Vera – Laczkovics L.: Többváltozós Analízis: 25.11. tétel)

Szükséges és elégséges feltétel potenciálosságra

Tétel: Szükséges és elégséges feltétel potenciálosságra
Legyen $D \subseteq \mathbb{R}^3$ nem üres nyílt halmaz, és legyen $v(r)$ $(r \in D \subseteq \mathbb{R}^3)$ folytonos vektor-vektor függvény. A $v(r)$ függvény pontosan akkor potenciálos D-n , ha bármely D-ben fekvő folytonos, rektifikálható és zárt γ görbére teljesül {Fte:szuks.elegs.felt.potenc

$$\oint_\gamma v(r)\, dr = 0. \tag{258}$$

Bizonyítás:
A feltétel szükségessége következik a Newton–Leibniz-formula 2-ből. Ha a $D \subseteq \mathbb{R}^3$ nem üres nyílt halmaz összefüggő, akkor az elégségesség lényegében hasonló a gondolatmenettel Newton-Leibniz formula 1-ben látott gondolatmenethez. Az általános esetben állítsuk elő D-t a páronként diszjunkt, nem üres és összefüggő D_i $(i \in I)$ halmazok uniójaként. A már látottak szerint minden i-re van olyan $u_i(r)$ $(r \in D_i)$ skalár-vektor függvény, hogy $u_i(r)$ differenciálható a D_i-ben, és itt $\operatorname{grad} u_i(r) = v(r)$. Legyen $\mathrm{u}(r) = u_i(r)$ minden $r \in D_i$-re és $i \in I$-re. Világos, hogy ekkor $\mathrm{u}(r)$ primitív függvénye $v(r)$-nek a D halmazon.

Elégséges feltétel a Jacobi-mátrix szimmetriájára

Tétel: Elégséges feltétel a Jacobi-mátrix szimmetriájára
Legyen $v(r) = (v_1(r), v_2(r), v_3(r)) : D \to \mathbb{R}^3$ differenciálható vektor-vektor függvény egy D nyílt halmazon. Ha $v(r)$-nek van potenciálfüggvénye a D-n, akkor {Fte:elegs.felt.Jacobi.szim}

$$\frac{\partial v_i}{\partial x_j}(r) = \frac{\partial v_j}{\partial x_i}(r) \tag{259}$$

minden $r \in D$-re és $i, j = 1, 2, 3$-ra, azaz ha a $v(r)$ differenciálható vektor-vektor függvénynek van potenciálfüggvénye a D nyílt halmazon, akkor bármely $r \in D$ pontban a $v(r)$ vektormező Jacobi-mátrixa szimmetrikus.

Bizonyítás:
Legyen $\mathrm{u}(r)$ a $v(r)$ primitív függvénye D-n. Ekkor a feltétel szerint az $\mathrm{u}(r)$ kétszer differenciálható D-n, így a Young tétel miatt

$$\frac{\partial v_i}{\partial x_j}(r) = \frac{\partial}{\partial x_j}\frac{\partial \mathrm{u}}{\partial x_i}(r) = \frac{\partial}{\partial x_i}\frac{\partial \mathrm{u}}{\partial x_j}(r) = \frac{\partial v_j}{\partial x_i}(r) \tag{260}$$

teljesül minden $r \in D$-re és $i, j = 1, 2, 3$-ra.

Potenciálfüggvény

Mintafeladat: Potenciálfüggvény
Mutassuk meg, hogy a $v(r) = \left(-\frac{y}{x^2+y^2}, \frac{x}{x^2+y^2}\right)$ vektormezőnek nincs primitív függvénye az $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ halmazon!

Megoldás:
Javaslat:
Számítsuk ki egy R sugarú origó középpontú körvonalon a $v(r)$-nek a vonalintegrálját.
Lépés:
Tekintsük a γ körvonal szokásos paraméterezését:

$$r(t) = R\cos(t)\vec{i} + R\sin(t)\vec{j} \qquad t \in [0, 2\pi). \tag{261}$$

Javaslat:
Lokalizáljuk a vektormezőt az adott görbe mentén.
Lépés:

$$v(r(t)) = -\frac{R\sin(t)}{R^2}\vec{i} + \frac{R\cos(t)}{R^2}\vec{j}. \tag{262}$$

Javaslat:
Most határozzuk meg a görbe paraméterezésének az idő szerinti deriváltját.
Lépés:

$$\dot{r}(t) = -R\sin(t)\vec{i} + R\cos(t)\vec{j}. \tag{263}$$

Javaslat:
Számoljuk ki a skaláris szorzatot, amit később integrálni kell.
Lépés:

$$\begin{aligned} v(r(t)) \cdot \dot{r}(t) &= \left(-\frac{R\sin(t)}{R^2}\vec{i} + \frac{R\cos(t)}{R^2}\vec{j}\right) \cdot (-R\sin(t)\vec{i} + R\cos(t)\vec{j}) \\ &= \sin^2 t + \cos^2 t = 1. \end{aligned} \tag{264}$$

Javaslat:
Számítsuk ki az integrált.
Lépés:

$$\oint_\gamma v(r)\,dr = \int_0^{2\pi} v(r(t)) \cdot \dot{r}(t)\,dt = \int_0^{2\pi} 1\,dt = 2\pi. \tag{265}$$

Mivel a vektormezőnek az adott körvonalon vett vonalintegrálja nem nulla, ezért nincs potenciálfüggvénye.

Megjegyzés:
Lényeges különbség van az egy- és többdimenziós analízis között. Ismeretes, hogy egy intervallumon értelmezett egyváltozós folytonos függvénynek mindig van primitív függvénye. Ezzel szemben többváltozóban általában egy folytonos, sőt differenciálható vektor-vektor függvénynek sincs primitív függvénye, sőt az örvénymentesség sem elégséges feltétele annak, hogy legyen a vektormezőnek potenciálfüggvénye.

Lineáris leképezés potenciálfüggvénye

Tétel: Lineáris leképezés potenciálfüggvénye
Egy $A : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ lineáris leképezésnek akkor és csak akkor van potenciálfüggvénye, ha az A leképezés mátrixa szimmetrikus. {Fte:lin.lek.potenc.fuggv.}

Bizonyítás:
I. Láttuk, hogy minden lineáris leképezés differenciálható, és a deriváltja bármely pontban önmaga, tehát a Jacobi-mátrixa minden pontban megegyezik a mátrixával. Így a fentiek szerint, ha az A lineáris transzformációnak van primitív függvénye, akkor a mátrixa szimmetrikus.

II. Tegyük fel, hogy A lineáris leképezés mátrixa szimmetrikus. Legyen ez a mátrix

$$\mathrm{A} = (a_{ij}), \tag{266}$$

ahol $a_{ij} = a_{ji}$ minden $i, j = 1, 2, 3$-ra. Legyen

$$\mathrm{u}(x_1, x_2, x_3) = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3} a_{ij}x_ix_j. \tag{267}$$

Megmutatható, hogy a fenti $\mathrm{u}(x_1, x_2, x_3)$ skalármező (kvadratikus alak) az A lineáris leképzés potenciálfüggvénye. Valóban, az $\mathrm{u}(x_1, x_2, x_3)$ (nyilvánvalóan) differenciálható és

$$\frac{\partial \mathrm{u}}{\partial x_i}(x_1, x_2, x_3) = \sum_{j=1}^{3} a_{ij}x_j \tag{268}$$

minden $i = 1, 2, 3$ esetén, így a $\frac{\partial \mathrm{u}}{\partial x_i}(x_1, x_2, x_3)$ megegyezik az $A(x_1, x_2, x_3)$ vektor i-edik koordinátafüggvényével. Következésképpen az $\mathrm{u}(x_1, x_2, x_3)$ az A lineáris leképezés potenciálfüggvénye.

Vektormező potenciálfüggvénye

Tétel: Vektormező potenciálfüggvénye
Legyen konvex nyílt halmaz. Egy differenciálható $v(r) : D \to \mathbb{R}^3$ vektor-vektor függvénynek pontosan akkor létezik potenciálfüggvénye D-ben, ha bármely $r \in D$ pontban $v(r)$ Jacobi-mátrixa szimmetrikus. {Fte:vektormezo.potencfuggv}

Bizonyítás:
A Jacobi-mátrixra vonatkozó feltétel szükségességét már láttuk.

(Vázlat) Az elégségesség bizonyítása meghaladja e jegyzet kereteit, az ún. Goursat-lemmán alapul. Megmutatható a következő: Legyen D

nyílt halmaz és a, b és c olyan pontok D-ben, melyekre az $[a, b, c]$ térbeli háromszög D-ben van. Jelöljük az $[a, b, c]$ térbeli háromszög oldalait alkotó zárt háromszöget γ-val. Tegyük fel, hogy a fenti térbeli háromszög minden pontjára a $v(r)$ differenciálható, és ott a Jacobi-mátrixa szimmetrikus. Ekkor

$$\oint_\gamma v(r)\, dr = 0. \tag{269}$$

A potenciálfüggvény létezéséhez elegendő belátni, hogy v integrálja nulla minden D-ben fekvő zárt poligonra. Ezen állítás a poligon törött szakaszai szerinti indukcióval történhet.

Egyszeres összefüggőség

Definíció: Egyszeresen összefüggő síkbeli tartomány

Azt mondjuk, hogy a D **síkbeli tartomány egyszeresen összefüggő**, ha D nyílt, összefüggő és minden D-ben fekvő zárt görbe esetén a görbe által határolt tartomány is D-ben van. `{Fde:egyszeresen.of.sikban}`

Definíció: Egyszeresen összefüggő térbeli felület

Azt mondjuk, hogy egy adott **egyszerű felület egyszeresen összefüggő**, ha egy síkbeli egyszeresen összefüggő tartomány homeomorf képe. `{Fde:egyszeresen.of.terben}`

Definíció: Egyszeresen összefüggő térbeli részhalmaz

Azt mondjuk, hogy egy V **térbeli részhalmaz egyszeresen összefüggő tartomány**, ha bármely $\gamma \subseteq V$ szakaszonként egyszerű, zárt differenciálható görbébe illeszthető olyan egyszeresen összefüggő, reguláris felületdarab, amely V-ben van. `{Fde:egyszeresen.of.reszhalm`

Megjegyzések:

- A síkbeli és térbeli konvex tartományok egyszeresen összefüggőek.
- Síkbeli korlátos nyílt tartomány pontosan akkor egyszeresen összefüggő, ha a tartomány határa összefüggő.
- A tórusz nem egyszeresen összefüggő.
- Nem triviális, hogy egy síkbeli összefüggő nyílt halmaz akkor és csak akkor egyszeresen összefüggő, ha egy (síkbeli) konvex nyílt halmaz folytonos bijektív képe. Ez az állítás magasabb dimenziós terekben nem igaz. Megmutatható, hogy a háromdimenziós térben a $D = \{x \in \mathbb{R}^3 : R_1 < |x| < R_2\}$ nyílt halmaz egyszeresen összefüggő, de (nagyon) nem triviális, hogy a D nem áll elő egy térbeli konvex nyílt halmaz folytonos bijektív képeként.

Vektormező potenciálfüggvénye egyszeresen összefüggő halmazon

Tétel: Vektormező potenciálfüggvénye 2

Legyen egyszeresen összefüggő nyílt halmaz. Egy differenciálható $v(r) : D \to \mathbb{R}^2$ vektormezőnek akkor és csak akkor van potenciálfüggvénye D-ben, ha $v(r)$ Jacobi-mátrixa minden $r \in D$ pontban szimmetrikus. `{Fte:vektormezo.potenc.fuggv`

Bizonyítás:
Meghaladja e jegyzet kereteit. A tétel bizonyításához szükség van a görbe egy pontra való folytonos deformációjának fogalmára. (Lsd. pl. Császár Ákos: Valós Analízis, 234. tétel.

Tétel: Vektormező potenciálfüggvénye 3 {Fte:vektormezo.potencfuggv3
Legyen D egyszeresen összefüggő nyílt halmaz. Egy differenciálható $v(r) : D \to \mathbb{R}^3$ vektormezőnek akkor és csak akkor van potenciálfüggvénye D-ben, ha a $\operatorname{rot} v(r) = 0$ D-n.

Bizonyítás:
A rotáció definíciójából és az előző állításból közvetlenül adódik.

Tétel: Ekvivalenciatétel {Fte:ekvivalencia.tetel}
Legyen D egyszeresen összefüggő nyílt halmaz és $v(r) : D \to \mathbb{R}^3$ differenciálható vektormező. Ekkor a következő állítások ekvivalensek:

1. $v(r)$-nek létezik potenciálfüggvénye D-ben.
2. $v(r)$ konzervatív D-n.
3. $\operatorname{rot} v(r) = 0$ D-n.

Bizonyítás:
Az előző állítások közvetlen következménye.

Potenciálfüggvény keresése {Fmi:potenc.fuggv.keresese}

Mintafeladat: Potenciálfüggvény keresése
Létezik-e, és ha igen, határozza meg a

$$v(r) = (2xy + 3x^2yz + z^2)\vec{i} + (x^2 + x^3z)\vec{j} + (x^3y + 2xz)\vec{k} \tag{270}$$

vektormező potenciálfüggvényét.

Megoldás:
Javaslat:
Nézzük meg, hogy örvénymentes-e.
Lépés:

$$\begin{aligned}\operatorname{rot} v(r) &= \det\begin{pmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{pmatrix} \\ &= \det\begin{pmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 2xy + 3x^2yz + z^2 & x^2 + x^3z & x^3y + 2xz \end{pmatrix} \\ &= (x^3 - x^3)\vec{i} + (3x^2y + 2z - (3x^2y + 2z))\vec{j} + (2x + 3x^2z - (2x + 3x^2z)) = 0,\end{aligned} \tag{271}$$

azaz v rotációmentes, így létezik potenciálfüggvénye.

Javaslat:
u(x, y, z)-t a gradiensének ismeretében számoljuk ki.
Lépés:
Egy olyan u(x, y, z) skalármezőt keresünk, amelyre

$$\frac{\partial \mathrm{u}}{\partial x}(x, y, z) = 2xy + 3x^2yz + z^2 \tag{272}$$

$$\frac{\partial \mathrm{u}}{\partial y}(x, y, z) = x^2 + x^3z \tag{273}$$

$$\frac{\partial \mathrm{u}}{\partial z}(x, y, z) = x^3y + 2xz. \tag{274}$$

Javaslat:
Integráljuk az első egyenlet mindkét oldalát rögzített y és z-re az x változó szerint.
Lépés:

$$\mathrm{u}(x, y, z) = x^2y + x^3yz + xz^2 + h(y, z). \tag{275}$$

Javaslat:
Helyettesítsük be ezt a függvényt a második egyenletbe.
Lépés:

$$\frac{\partial \mathrm{u}}{\partial y}(x, y, z) = x^2 + x^3z = x^2 + x^3z + h'_y(y, z). \tag{276}$$

Javaslat:
Az így kapott $h'_y(y, z)$ függvényt integráljuk az rögzített z-re az y változó szerint.
Lépés:

$$h'_y(y, z) = 0, \tag{277}$$

így

$$h(y, z) = h(z). \tag{278}$$

Javaslat:
Helyettesítsünk be a harmadik egyenletbe.
Lépés:

$$\frac{\partial \mathrm{u}}{\partial z}(x, y, z) = x^3y + 2xz = x^3y + 2xz + h'(z). \tag{279}$$

Mivel $h'(z) = 0$, ezért a keresett potenciálfüggvény

$$\mathrm{u}(x, y, z) = x^2y + x^3yz + xz^2 + C \qquad (C \in \mathbb{R}). \tag{280}$$

2.4. Gauss–Osztrogradszkij-tétel

E lecke befejezése után a hallgató:

- zárt felület esetén ismeri és érti a felületi integrál és a térfogati integrál közötti kapcsolatot,
- zárt felület esetén alkalmazni tudja a Gauss–Osztrogradszkij-tételt.

Gauss–Osztrogradszkij-tétel

Megjegyzések:

- Jelölje $v(r) = v_1(r)\vec{i} + v_2(r)\vec{j} + v_3(r)\vec{k}$ egy áramló folyadék sebességmezőjét. Tegyük fel, hogy a $v(r)$ differenciálható vektor-vektor függvény. Ismeretes, hogy a $v(r)$ vektormező divergenciáját a következőképp számoljuk ki az r pontban:

$$\operatorname{div} v(r) = \frac{\partial v_1}{\partial x} + \frac{\partial v_2}{\partial y} + \frac{\partial v_3}{\partial z}. \tag{281}$$

  Így szemléletesen a divergencia kiszámolja az x tengely irányú folyadék „változását”, az y és a z tengely felől jövő folyadék „változását”, majd ezeket a különböző irányokból jövő „folyadékmennyiség-változásokat” összegezi. Így a divergencia adott pontbeli értéke esetén megkapjuk, hogy a pont inkább „elnyeli” a vizet vagy inkább „forrásként” működik. Így a fenti vektormező esetén a divergencia minden ponthoz rendel egy számot, ami megmutatja, hogy ott mennyi többlet-folyadék áramlik „kifelé”, vagy mennyi „tűnik el” benne. Ha tekintünk egy zárt térrészt és itt „összeadjuk” az egyes pontok divergenciáját, akkor megkapjuk, hogy ebből a zárt térrészből összesen mennyi folyadék áramlik kifelé (vagy tűnik el). Így a zárt térrészből egységnyi idő alatt kiáramló folyadék mennyisége egyenlő a zárt térrész határát alkotó felületen egységnyi idő alatt átáramló folyadék mennyiségével. Pontosan erről szól a Gauss–Osztrogradszkij-tétel.

- A Gauss–Osztrogradszkij-tétel egyike a differenciálgeometria legfontosabb tételeinek. A tételt csak abban a speciális esetben fogjuk bebizonyítani, ha F reguláris zárt felület, kifelé irányított normálvektorral, valamint a Descartes-féle derékszögű koordináta rendszerben a V a mondott feltételeken túl mind az xy mind az xz és mind az yz síkra nézve is normáltartomány. A bizonyítás során pótlólagos feltevéseket is teszünk. Sokszor nem triviális meggondolni, hogy ezt megtehetjük.

Tétel: Gauss–Osztrogradszkij-tétel
Legyen F olyan egyszerű zárt felület, amely élekben csatlakozó reguláris felületdarabokból áll, kifelé irányított normálvektorral, az F felület által határolt V térrész Jordan-mérhető, továbbá a $v(r)$ vektor-vektor függvény az $F \cup V$ halmazon folytonosan differenciálható. Ekkor {Fte:Gauss-Osztrogradszkij.t

$$\oint\!\!\!\!\int_F v(r)\, dF = \iiint_V \operatorname{div} v(r)\, dV. \tag{282}$$

Lemma: Gauss–Osztrogradszkij-segédtétel 1
Legyen γ egyszerű, kétszer folytonosan differenciálható, zárt síkgörbe, melynek görbülete csak véges sok pontban zérus. Jelöljük a γ hosszát l-lel és a görbületének maximumát M-mel. Ekkor minden $0 < \epsilon < \frac{1}{M}$ számra a γ görbe $K_{\gamma,\epsilon}$-nal jelölt ϵ sugarú környezete esetén {Fte:Gauss-Osztrogradszkij.s

$$\lambda(K_{\gamma,\epsilon}) \leq 2l\epsilon. \tag{283}$$

Bizonyítás:
A lemma állítása szemléletesen nyilvánvaló. Ha $K_{\gamma,\epsilon}$ adott ϵ esetén nem fedi át önmagát, akkor a $K_{\gamma,\epsilon}$ -t szétvágva egy 2ϵ szélességű l hosszúságú szalagot kapunk, aminek a területe $2l\epsilon$. A lemma állítása akkor nem triviális, ha a $K_{\gamma,\epsilon}$ önmagát átfedő. A precíz bizonyítása bonyolult, meghaladja e jegyzet kereteit, pl. az ún. Frenet-formulák ismeretét feltételezné.

A bizonyítás alapgondolata a következő: Tekintsük a γ-nak az ívhossz szerinti (természetes) paraméterezését, azaz legyen

$$\gamma = r([0,l]). \tag{284}$$

Jelölje $n(t)$ a γ ún. főnormális egységvektorát, azaz a következő vektort:

$$n(t) = \frac{\ddot{(t)}}{|\ddot{r}(t)|}. \tag{285}$$

Paraméterezzük a $K_{\gamma,\epsilon}$ síkbeli felületet:

$$r(u,v) = r(u) + vn(u) \qquad (u,v) \in [0,l] \times [-\epsilon,\epsilon]. \tag{286}$$

Meggondolható, hogy az így paraméterezett $K_{\gamma,\epsilon}$ felület felszíne (területe) létezik és kiszámítható a $K_{\gamma,\epsilon}$ területe a felszínképlet szerint. Ez alapján adódik, hogy

$$\lambda(K_{\gamma,\epsilon}) \leq 2l\epsilon. \tag{287}$$

Ezzel kaptuk a lemma állítását.

Lemma: Gauss–Osztrogradszkij segédtétel 2
Legyen $T \subseteq \mathbb{R}^2$ az xy sík zárt, összefüggő, Jordan-mérhető tartománya és $f : T \to \mathbb{R}^2$ folytonosan differenciálható kétváltozós függvény. Jelölje $n(x,y)$ az $F = f(T)$ reguláris felületdarab felfelé mutató normál egységvektorát és ezen vektornak az xy sík $\vec{k} = (0,0,1)$ normálvektorával bezárt szögét $\alpha(x,y)$-nal. Ekkor létezik olyan $(x_0,y_0) \in T$, hogy {Fte:Gauss-Osztrogradszkij.s

$$\lambda(T) = \lambda(F)\cos\alpha(x_0,y_0). \tag{288}$$

Bizonyítás:
Tekintsük az $f(T)$ reguláris felületdarab egy „természetes" paraméterezését:

$$r(x,y) = x\vec{i} + y\vec{j} + f(x,y)\vec{j} \qquad (x,y) \in T. \tag{289}$$

Ekkor ezen felületdarab felfelé mutató normál egységvektora

$$n = -\frac{f'_x}{(1+(f'_x)^2+(f'_y)^2)^{\frac{1}{2}}}\vec{i} - \frac{f'_y}{(1+(f'_x)^2+(f'_y)^2)^{\frac{1}{2}}}\vec{j} + \frac{1}{(1+(f'_x)^2+(f'_y)^2)^{\frac{1}{2}}}\vec{k}. \tag{290}$$

Így az n normál (egység)vektornak a k-val bezárt szögére adódik:

$$\cos\alpha = \frac{1}{(1+(f'_x)^2+(f'_y)^2)^{\frac{1}{2}}}. \tag{291}$$

Ismeretes a felszínképlet alapján:

$$\lambda(F) = \iint_T (1+(f'_x)^2+(f'_y)^2)^{\frac{1}{2}}\, dT \tag{292}$$

A kettős integrálra vonatkozó középértéktétel miatt létezik olyan $(x_0, y_0) \in T$ pont, hogy

$$\begin{aligned}\lambda(F) &= \iint_T (1 + (f'_x(x_0, y_0))^2 + (f'_y(x_0, y_0))^2)^{\frac{1}{2}}\, dT \\ &= (1 + (f'_x(x_0, y_0))^2 + (f'_y(x_0, y_0))^2)^{\frac{1}{2}} \iint_T 1\, dT \\ &= (1 + (f'_x(x_0, y_0))^2 + (f'_y(x_0, y_0))^2)^{\frac{1}{2}} \lambda(T),\end{aligned} \tag{293}$$

azaz

$$\lambda(T) = \lambda(F) \cos\alpha(x_0, y_0). \tag{294}$$

Ezzel kaptuk a lemma állítását.

Megjegyzés:
Ha F síktartomány, akkor a vetületének a területe egyenlő az F síkrész területének és az F ill. T síkok által bezárt (hegyes) szög koszinuszának a szorzatával. Ez a speciális eset a második lemmától függetlenül egyszerűen meggondolható.

Bizonyítás:
Most rátérünk a Gauss–Osztrogradszkij tétel bizonyítására.

Legyenek a $v(r)$ vektormező koordináta-függvényei $v_1(r), v_2(r), v_3(r)$, azaz

$$v(r) = v_1(r)\vec{i} + v_2(r)\vec{j} + v_3(r)\vec{k}. \tag{295}$$

Ismeretes, hogy

$$\operatorname{div} v(r) = \frac{\partial v_1(r)}{\partial x} + \frac{\partial v_2(r)}{\partial y} + \frac{\partial v_3(r)}{\partial z}. \tag{296}$$

Így

$$\iiint_V \operatorname{div} v(r)\, dV = \iiint \left(\frac{\partial v_1(r)}{\partial x} + \frac{\partial v_2(r)}{\partial y} + \frac{\partial v_3(r)}{\partial z} \right) dx\, dy\, dz. \qquad (*) \quad \texttt{\{eq:div.integral\}}$$

Először az integrandus harmadik tagját fogjuk integrálni, és ennek során a V-t az xy síkra nézve normáltartományként kezeljük. Legyen V_{xy} a V xy síkra való vetülete, és jelölje ezen vetület határoló görbéjét γ_{xy}, amelyről feltesszük, hogy egy reguláris darabokból összetett, zárt síkgörbe. A V térbeli tartomány alsó, illetve felső burkoló felületének egyenlete legyen

$$z = f(x, y) \text{ és } z = g(x, y), \tag{297}$$

amelyekről feltesszük, hogy folytonosan differenciálhatók a V_{xy} tartományon. Így a többes integrálokra vonatkozó Fubini-tétel alkalmazásával adódik, hogy

$$\begin{aligned}\iiint_V \frac{\partial v_3(r)}{\partial z}\, dx\, dy\, dz &= \iint_{V_{xy}} \int_{f(x,y)}^{g(x,y)} \frac{\partial v_3(r)}{\partial z}\, dx\, dy\, dz \\ &= \iint_{V_{xy}} (v_3(x, y, g(x, y)) - v_3(x, y, f(x, y)))\, dx\, dy \\ &= \iint_{V_{xy}} v_3(x, y, g(x, y))\, dx\, dy - \iint_{V_{xy}} v_3(x, y, f(x, y))\, dx\, dy\end{aligned}$$

$$(**) \quad \texttt{\{eq:xy.integral\}}$$

Vizsgáljuk először ezen (**) egyenlőség jobboldalának első tagját. Tekintsük a γ_{xy} határológörbe ϵ környezetét, $K_{\gamma_{xy},\epsilon}$-t. Ekkor teljesül, hogy

$$\iint_{V_{xy}} v_3(x,y,g(x,y))\,dx\,dy = \iint_{V_{xy}\setminus K_{\gamma_{xy},\epsilon}} v_3(x,y,g(x,y))\,dx\,dy + \iint_{V_{xy}\cap K_{\gamma_{xy},\epsilon}} v_3(x,y,g(x,y))\,dx\,dy. \tag{298}$$

A v_3 korlátos függvény a $V_{xy}\cap K_{\gamma_{xy},\epsilon}$ halmazon való folytonossága miatt és az első lemma alapján felírható a triviális becslés a második tagra. Létezik olyan $P>0$ szám, hogy minden (kicsi) $\epsilon>0$ esetén:

$$\left|\iint_{V_{xy}\cap K_{\gamma_{xy},\epsilon}} v_3(x,y,g(x,y))\,dx\,dy\right| \le P\epsilon. \tag{299}$$

Az első tagot kicsit bonyolultabb kezelni. Legyen $\Phi=\{T_1,T_2,\dots,T_n\}$ a $V_{xy}\setminus K_{\gamma_{xy},\epsilon}$ tartomány egy tetszőleges felosztása. Ekkor

$$\iint_{V_{xy}\setminus K_{\gamma_{xy},\epsilon}} v_3(x,y,g(x,y))\,dx\,dy = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} v_3(x_i,y_i,g(x_i,y_i))\lambda(T_i), \tag{300}$$

ahol $(x_i,y_i)\in T_i$ és a Φ felosztás minden határon túl finomodó. E felosztáshoz hozzátartozik az

$$F_\epsilon = \Big\{(x,y,z) : (x,y)\in V_{xy}\setminus K_{\gamma_{xy},\epsilon},\, z=g(x,y)\Big\} \tag{301}$$

felületnek az $\{F_1,\dots,F_n\}$ felosztása is. Minden F_i-re alkalmazható a második lemma. Így léteznek $(x_i,y_i)\in T_i$ pontok, hogy

$$\lambda(T_i)=\lambda(F_i)\cos\alpha_3(x_i,y_i), \tag{302}$$

ahol $\cos\alpha_3$ az F felület $(x_i,y_i,g(x_i,y_i))$ pontbeli normálvektorának harmadik iránykoszinusza. Ebből következően

$$\sum_{i=1}^{n} v_3(x_i,y_i,g(x_i,y_i))\lambda(T_i) = \sum_{i=1}^{n} v_3(x_i,y_i,g(x_i,y_i))\lambda(F_i)\cos\alpha_3(x_i,y_i). \tag{303}$$

Ha a $V_{xy}\setminus K_{\gamma_{xy},\epsilon}$ tartomány $\{T_1,T_2,\dots,T_n\}$ felosztása mindenhatáron túl finomodó, akkor az F_ϵ felületnek az $\{F_1,F_2,\dots,F_n\}$ felosztása is ilyen. A felosztások finomodása révén ez is integrálközelítő összeg, és tart az alábbi felszín szerinti integrálhoz:

$$\iint_{F_\epsilon} v_3(x,y,z)\cos\alpha_3(x,y)\,dF_\epsilon. \tag{304}$$

Összegezve

$$\iint_{V_{xy}\setminus K_{\gamma_{xy},\epsilon}} v_3(x,y,g(x,y))\,dx\,dy = \iint_{F_\epsilon} v_3(x,y,z)\cos\alpha_3(x,y)\,dF_\epsilon. \tag{305}$$

Jelöljük F^+-szal az F reguláris felület ún. felső burkoló felület darabját, azaz az F felület azon darabját, amelyre a kifelé mutató felületi normál vektor a $\vec{k}$ egységvektorral hegyes szöget zár be. Könnyen meggondolható, hogy ha $\epsilon\to 0$, akkor az $F_\epsilon\to F^+$. Ebből, az regularitásából és a v_3 folytonossága miatt az F_ϵ-on vett felszín szerinti integrál tart az F^+-on vett felszín szerinti integrálhoz. Következésképpen

$$\iint_{V_{xy}} v_3(x,y,g(x,y))\,dx = \iint_{F^+} v_3(x,y,z)\cos\alpha_3(x,y)\,dF^+. \tag{306}$$

Vizsgáljuk most a $(**)$ egyenlőség jobboldalának második tagját. Jelöljük F^--szal az reguláris felület ún. alsó burkoló felület darabját, azaz az F felület azon darabját, amelyre a kifelé mutató felületi normálvektor a $\vec{k}$ egységvektorral tompaszöget zár be. A fentiekhez teljesen hasonlóan adódik:

$$-\iint_{V_{xy}} v_3(x,y,f(x,y))\,dx = \iint_{F^-} v_3(x,y,z)\cos\alpha_3(x,y)\,dF^-. \tag{307}$$

Így következőleg:

$$\iiint_V \frac{\partial v_3(r)}{\partial z}\,dx\,dy\,dz = \iint_{F^+} v_3(x,y,z)\cos\alpha_3(x,y)\,dF^+ + \iint_{F^-} v_3(x,y,z)\cos\alpha_3(x,y)\,dF^-. \tag{308}$$

(Az F^--n vett felszíni integrálban definíció szerint a kifelé mutató normálvektor tompaszögű, így van egy (-1)-es szorzó.)

Az felület azon részhalmazán, melyek sem az F^+-hoz, sem az F^- felülethez nem tartoznak, a felszíni integrál zérus, ugyanis ez esetben a felületi normálvektorok a $\vec{k}$ vektorra merőlegesek, így a vagyis az iránykoszinuszuk zérus.

Végül is az kaptuk, hogy

$$\iiint_V \frac{\partial v_3(r)}{\partial z} = \oiint_F v_3(x,y,z)\cos\alpha_3(x,y)\,dF. \tag{309}$$

Teljesen hasonlóan átírhatjuk a $(*)$ egyenlőség jobb oldalának első két tagját is. Így kapjuk, hogy

$$\iiint_V \operatorname{div} v(r)\,dV = \oiint_F v_1(x,y,z)\cos\alpha_1(y,z)\,dF + \oiint_F v_2(x,y,z)\cos\alpha_2(x,z)\,dF + \oiint_F v_3(x,y,z)\cos\alpha_3(x,y) \tag{310}$$

ahol $\cos\alpha_i(x,y)$ az F felület kifelé mutató normálvektorának iránykoszinuszai. Ezen felszíni integrálok összege viszont nem más, mint a $v(r)$ függvény F felületen vett felületi integrálja. Ezzel a tétel állítását beláttuk.

Vektormező átlagos forráserőssége

Definíció: Vektormező átlagos forráserőssége

Legyen F reguláris felületdarabokból összetett, zárt felület kifelé irányított normálvektorral, az F által határolt V térrész Jordan-mérhető és a $v(r)$ vektor-vektor függvény folytonos F-en. Ekkor a {Fde:vektormezo.atl.forr}

$$\frac{1}{\lambda(V)}\oiint_F v(r)\,dF \tag{311}$$

hányadost a $v(r)$ vektormező V-re vonatkozó **átlagos forráserősségének** nevezzük.

Vektormező átlagos forráserőssége {Fmi:vektormezo.atl.forr}

Mintafeladat: Vektormező átlagos forráserőssége

Legyen $v(r) = |r|r$ adott vektormező, $R > 0$ és F a $V = \{(x, y, z) : x^2 + y^3 + z^2 \leq R\}$ térrész által határolt zárt felület. Számítsuk ki a $v(r)$ vektormező V-re vonatkozó átlagos forráserősségét!

Megoldás:

Javaslat:

Alkalmazni fogjuk a Gauss–Osztrogradszkij-tételt! Ehhez először számítsuk ki a $v(r)$ vektormező divergenciáját.

Lépés:

$$\begin{aligned}
\operatorname{div} v(r) &= \operatorname{div}\left((x^2+y^2+z^2)^{\frac{1}{2}} x\vec{i} + (x^2+y^2+z^2)^{\frac{1}{2}} y\vec{j} + (x^2+y^2+z^2)^{\frac{1}{2}} z\vec{k}\right) \\
&= \frac{1}{2}(x^2+y^2+z^2)^{-\frac{1}{2}} 2x^2 + (x^2+y^2+z^2)^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{2}(x^2+y^2+z^2)^{-\frac{1}{2}} 2y^2 + (x^2+y^2+z^2)^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{2}(x^2+y^2 \\
&= (x^2+y^2+z^2)^{-\frac{1}{2}}(x^2+y^2+z^2) + 3(x^2+y^2+z^2)^{\frac{1}{2}} \\
&= 4(x^2+y^2+z^2)^{\frac{1}{2}}.
\end{aligned} \tag{312}$$

Javaslat:

Alkalmazzuk a Gauss–Osztrogradszkij-tételt!

Lépés:

$$\oiint_F v(r)\,dF = \iiint_V \operatorname{div} v(r)\,dF = \iiint_V 4(x^2+y^2+z^2)^{\frac{1}{2}}\,dV. \tag{313}$$

Javaslat:

Számítsuk ki a fenti integrált úgy, hogy áttérünk térbeli polárkoordinátarendszerre.

Lépés:

Legyen

$$x = r\sin(u)\cos(v) \tag{314}$$
$$y = r\sin(u)\sin(v) \tag{315}$$
$$z = r\cos(v), \tag{316}$$

ahol

$$(r, u, v) \in [0, R] \times [0, \pi] \times [0, 2\pi]. \tag{317}$$

Javaslat:

Végezzük el az integrálást.

Lépés:

$$\begin{aligned}
\iiint_V 4(x^2+y^2+z^2)^{\frac{1}{2}}\,dV &= \int_0^R \int_0^\pi \int_0^{2\pi} 4r \cdot r^2 \sin(u)\,dv\,du\,dr \\
&= \int_0^R 4r^3\,dr \cdot \int_0^\pi \sin(u)\,du \cdot \int_0^{2\pi} 1\,dv \\
&= R^4 \cdot 2 \cdot 2\pi = 4R^2\pi.
\end{aligned} \tag{318}$$

Így kapjuk a feladatban szereplő vektormezőnek a felületre vett átlagos forráserősségét:

$$\frac{1}{\lambda(V)} \oiint_F v(r)\,dF = \frac{4R^4\pi}{\frac{4R^3\pi}{3}} = 3R. \tag{319}$$

Gauss–Osztrogradszkij-tétel alkalmazása {Fmi:G.O.tetel.alk.}

Mintafeladat: Gauss–Osztrogradszkij-tétel alkalmazása
Legyen $v(r) = (x^2+y^2+z^2)\vec{j}$ adott vektormező és $F = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 + z^2 = 1, y \geq 0\}$ felület. Számítsuk ki a $v(r)$ vektormező F-re vonatkozó felületi integrálját!

Megoldás:
Javaslat:
Mivel a feladatban lévő felület – az xz síkon fekvő 1 sugarú félgömbfelület – nem zárt, ezért tegyük zárttá, azaz az F felülethez vegyük hozzá az xz síkban lévő origó középpontú F_1-gyel jelölt körlemezt. Alkalmazzuk az $F \cup F_1$ zárt felületre a Gauss–Osztrogradszkij-tételt! Az így kiszámított felületi integrál értékéből ki kell vonni az F_1 felületen vett felületi integrált.
Lépés:

$$\iint_F v(r)\,dF = \oiint_{F\cup F_1} v(r)\,dF - \iint_{F_1} v(r)\,dF. \tag{320}$$

Javaslat:
Számítsuk ki a $\oiint_{F\cup F_1} v(r)\,dF$ felületi integrál értékét!
Lépés:

$$\oiint_{F\cup F_1} v(r)\,dF = \iiint_V \operatorname{div} v(r)\,dV, \tag{321}$$

ahol V az $F \cup F_1$ által közrezárt korlátos tartomány.
Javaslat:
Számítsuk ki a $v(r)$ vektormező divergenciáját!
Lépés:

$$\operatorname{div} v(r) = \operatorname{div}(x^2 + y^2 + z^2)\vec{j} = 2y. \tag{322}$$

Javaslat:
Alkalmazzuk a Gauss–Osztrogradszkij-tételt a $v(r)$ vektormezőre és az $F \cup F_1$ felületre!
Lépés:

$$\oiint_{F\cup F_1} v(r)\,dF = \iiint_V \operatorname{div} v(r)\,dF = \iiint_V 2y\,dV. \tag{323}$$

Javaslat:
A hármas integrál kiszámításához térjünk át a térbeli polárkoordinátarendszerre.
Lépés:
Legyen

$$x = r\sin(u)\cos(v) \tag{324}$$
$$y = r\sin(u)\sin(v) \tag{325}$$
$$z = r\cos(u), \tag{326}$$

ahol

$$(r, u, v) \in [0, 1] \times [0, \pi] \times [0, \pi]. \tag{327}$$

A térbeli polárkoordináta-rendszerben ez pontosan az xz síkon fekvő 1 sugarú félgömb.

Javaslat:

Végezzük el az integrálást.

Lépés:

$$\begin{aligned}\iiint_V 2y\,dV\,dV &= \int_0^1\int_0^\pi\int_0^\pi 2r\sin(u)\sin(v)\cdot r^2\sin(u)\,dv\,du\,dr\\ &= \int_0^1 2r^3\,dr\cdot\int_0^\pi \sin^2(u)\,du\cdot\int_0^\pi \sin(v)\,dv\\ &= \left[2\frac{r^4}{4}\right]_0^1\cdot\left[\frac{u}{2}-\frac{\sin(2u)}{4}\right]_0^\pi\cdot[-\cos(u)]_0^\pi\\ &= \frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2}2=\frac{\pi}{2}.\end{aligned} \tag{328}$$

Javaslat:

Számítsuk ki a $\iint_{F_1} v(r)\,dF$ felületi integrál értékét! Ehhez paraméterezzük a felületet (1 sugarú origó középpontú körlemez, amelynek az alapköre az xz síkon van).

Lépés:

$$r(u,v)=u\cos(v)\vec{i}+0\vec{j}+u\sin(v)\vec{k}, \tag{329}$$

ahol

$$(u,v)\in[0,1]\times[0,2\pi]. \tag{330}$$

Javaslat:

Számítsuk ki az F_1 felület paraméterezését leíró vektor-skalár függvény parciális deriváltjainak keresztszorzatát.

Lépés:

$$\begin{aligned}r'_u(u,v) &= \cos(v)\vec{i}+0\vec{j}+\sin(v)\vec{k}\\ r'_v(u,v) &= -u\sin(v)\vec{i}+0\vec{j}+u\cos(v)\vec{k}\\ r'_u(u,v)\times r'_v(u,v) &= \begin{pmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ \cos(v) & 0 & \sin(v)\\ -u\sin(v) & 0 & u\cos(v)\end{pmatrix}=0\vec{i}-u\vec{j}+0\vec{k}.\end{aligned}$$

Javaslat:

Vizsgáljuk meg a felületi normálvektor irányítását!

Lépés:

Mivel az $u\in[0,1]$, ezért a felületi normálvektor az $F_1\cup F$ felületből kifelé mutat. Így a felületi normálvektor irányítása jó.

Javaslat:

Lokalizáljuk a vektormezőt az F_1 felületen.

Lépés:

$$v(r(u,v))=0\vec{i}+u^2\vec{j}+0\vec{k} \tag{331}$$

Javaslat:

Most számítsuk ki a skaláris szorzatot.

Lépés:

$$v(r(u,v)) \cdot (r'_u(u,v) \times r'_v(u,v)) = (0\vec{i} + u^2\vec{j} + 0\vec{k}) \cdot (0\vec{i} - u\vec{j} + 0\vec{k}) = -u^3. \tag{332}$$

Javaslat:
Számítsuk ki az integrált.
Lépés:

$$\begin{aligned} \iint_{F_1} v(r)\,dF &= \int_0^1 \int_0^{2\pi} v(r(u,v)) \cdot (r'_u(u,v) \times r'_v(u,v))\,du\,dv \\ &= \int_0^1 -u^3\,du \int_0^{2\pi} 1\,dv = -\frac{1}{4} \cdot 2\pi = -\frac{\pi}{2}. \end{aligned} \tag{333}$$

Javaslat:
Számítsuk ki a $\iint_F v(r)\,dF$ felületi integrál értékét!
Lépés:

$$\iint_F v(r)\,dF = \iint_{F \cup F_1} v(r)\,dF - \iint_{F_1} v(r)\,dF = \frac{\pi}{2} - \left(-\frac{\pi}{2}\right) = \pi. \tag{334}$$

Vektormező átlagos forráserősség-sűrűsége

Tétel: Vektormező átlagos forráserősség-sűrűsége
Legyen $v(r)$ az r_0 pont egy környezetében folytonosan differenciálható, $\{F_n\}$ $(n = 1, 2, \ldots)$ reguláris felületdarabokból összetett, zárt felületek sorozata, melyre az F_n által határolt V_n térrész Jordan mérhető és $\lambda(V_n) \neq 0$. Tegyük fel, hogy az $\{F_n\}$ $(n = 1, 2, \ldots)$ halmazsorozat tart az r_0 ponthoz, azaz átmérője nullához tart, ha n tart végtelenhez és $r_0 \in V_n$-nek. Ekkor a $v(r)$ vektor-vektor függvény a V_n-re vonatkozó átlagos forráserősségeinek sorozata konvergens és {Fte:vektormezo.atl.forr.sur

$$\lim_{n \to \infty} \frac{1}{\lambda(V_n)} \oiint_{F_n} v(r)\,dF_n = \operatorname{div} v(r_0). \tag{335}$$

Bizonyítás:
Következik az integrálszámítás középértéktételéből és a $\operatorname{div} v(r)$ függvénynek a feltételek szerinti folytonosságából.

2.5. Stokes-tétel

E lecke befejezése után a hallgató:

- ismeri a felületi integrál és a vonalintegrál közötti kapcsolatot,
- alkalmazni tudja a Stokes-tételt görbék által határolt korlátos tartomány területének kiszámítására.

Stokes-tétel

Tétel: Stokes-tétel

Tegyük fel, hogy F olyan élekben csatlakozó reguláris felületdarabokból álló egyszerű, irányított felületdarab, melyet egyetlen, reguláris görbékből álló egyszerű zárt γ görbe határol. Az F felület normálvektorát irányítsuk úgy, hogy annak irányából nézve a γ pozitív körüljárású legyen. Tegyük fel, hogy a $v(r)$ vektormező folytonosan differenciálható az $F \cup \gamma$-n. Ekkor {Fte:Stokes.tetel}

$$\oint_\gamma v(r)\, dr = \iint_F \operatorname{rot} v(r)\, dF. \tag{336}$$

Ábra: Stokes-tétel

Megjegyzés:

A Stokes-tétel baloldalán a $v(r)$ vektormező (zárt) görbére vonatkozó vonalintegrálja (cirkulációja) áll. Ha $v(r)$ például egy erőteret leíró vektorvektor függvény, akkor a cirkuláció megadja a γ görbén végzett munkát. Ha a vonalintegrált elosztjuk a γ által határolt felületdarab felszínével, akkor megkapjuk azt az átlagos munkát, amelyet a próbarészecskének adott állású és egységnyi felszínű felületdarab határoló görbéjén való körbe mozgatása során végezni kell. Ez a rotáció fizikai tartalma.

Tétel: A rotáció fizikai tartalma

Legyen $v(r)$ az r_0 pont egy környezetében folytonosan differenciálható, F az r_0 ponton áthaladó reguláris felületdarab. Legyen az F felület r_0-beli normálvektora n és tegyük fel, hogy a $\{\gamma_n\}$ $(n = 1, 2, \ldots)$ görbék az F felület r_0-beli normálvektorának irányából nézve pozitív körüljárású, zárt reguláris felületi görbék végtelen sorozata, melyre F-nek γ_n által határolt darabja az r_0 pontot tartalmazza. Tegyük fel továbbá, hogy a γ_n végtelen zárt görbesorozat az r_0 pontra zsugorodik. E feltevések mellett {Fte:rotacio.fizikai.jelent}

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\lambda(F_n)} \oint_{\gamma_n} v(r)\, dr = \operatorname{rot} v(r_0) \cdot n. \tag{337}$$

Bizonyítás:

A Stokes-tétel, a kettős integrálokra vonatkozó középértéktétel alkalmazásával gondolható meg.

Megjegyzés:

Alkalmazzuk a Stokes-tételt a $v(r) = v_1(r)\vec{i} + v_2(r)\vec{j} + 0\vec{k}$ síkbeli vektormezőre és az xy síkban fekvő reguláris görbékből összetett, zárt pozitív irányítású γ görbére és az xy síknak azon mérhető T tartományára, melyet a γ határol. Tegyük fel, hogy a $v(r)$ vektormező a $T \cup \gamma$ halmazon folytonosan differenciálható vektormező. Ekkor {Fte:Sikbeli.Stokes.tetel}

$$\operatorname{rot} v(r) = \det \begin{pmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ v_1 & v_2 & 0 \end{pmatrix} = 0\vec{i} + 0\vec{j} + \left(\frac{\partial v_2}{\partial x} - \frac{\partial v_1}{\partial y} \right) \vec{k} \tag{338}$$

Mivel a T síkfelület normálvektora $\vec{k}$, ezért

$$\oint_\gamma v(r)\, dr = \iint_T \left(\frac{\partial v_2}{\partial x} - \frac{\partial v_1}{\partial y} \right) dT. \tag{339}$$

Ezt nevezik **síkbeli Stokes-tételnek** vagy **Green-tételnek**.

Green-tétel speciális esetben

Tétel: Green-tétel speciális esetben 1

Legyen F az xy síkban az x és y tengelyre is normáltartomány, és tegyük fel, hogy F-et egy olyan zárt görbe határolja, amelynek az x és y tengellyel párhuzamos egyenesekkel legfeljebb két metszéspontja van. Legyenek a megfelelő normáltartományokat leíró alsó és felső burkoló függvények {Fte:Green.tetel.spec.eset1}

$$\gamma_1 : y = f(x) \qquad a \le x \le b, \tag{340}$$
$$\gamma_2 : y = g(x) \qquad b \ge x \ge a. \tag{341}$$

Másrészt

$$\gamma_3 : x = h(y) \qquad d \ge y \ge c, \tag{342}$$
$$\gamma_4 : x = l(y) \qquad c \le y \le d. \tag{343}$$

Ekkor a

$$\gamma = \gamma_1 \cup \gamma_2 = \gamma_3 \cup \gamma_4 \tag{344}$$

zárt, pozítív körüljárású görbe az F tartomány határán. Tegyük fel, hogy az f, g, h és l folytonosan differenciálható függvények a megfelelő intervallumon és $v = v_1\vec{i} + v_2\vec{j}$ folytonosan differenciálható vektormező $F \cup \gamma$-n. Ekkor

$$\oint_\gamma v(r)\, dr = \iint_F \left(\frac{\partial v_2}{\partial x} - \frac{\partial v_1}{\partial y} \right) dF. \tag{345}$$

Bizonyítás:

I. Integráljuk a $\frac{\partial v_1}{\partial y}$ függvényt először y szerint:

$$\int_{f(x)}^{g(x)} \frac{\partial v_1}{\partial y}\, dy = v_1(x, g(x)) - v_1(x, f(x)). \tag{346}$$

Majd ezt a függvényt tovább integrálva $[a, b]$-n:

$$\begin{aligned} \int_a^b \int_{f(x)}^{g(x)} \frac{\partial v_1}{\partial y}\, dy\, dx &= \int_a^b (v_1(x, g(x)) - v_1(x, f(x)))\, dx \\ &= \int_a^b v_1(x, g(x)\, dx - \int_a^b v_1(x, f(x))\, dx \\ &= -\int_{\gamma_2} v_1(r)\vec{i}\, dr - \int_{\gamma_1} v_1(r)\vec{i}\, dr \\ &= -\oint_\gamma v_1(r)\vec{i}\, dr. \end{aligned} \tag{347}$$

Így kapjuk, hogy

$$\iint_F \left(-\frac{\partial v_1}{\partial y} \right) dy\, dx = \oint_\gamma v_1(r)\vec{i}\, dr. \tag{348}$$

Hasonlóan, integráljuk a $\frac{\partial v_2}{\partial x}$ függvényt először x szerint:

$$\int_{l(y)}^{h(y)} \frac{\partial v_2}{\partial x}\, dx = v_2(h(y), y) - v_2(l(y), y). \tag{349}$$

Majd ezt a függvényt tovább integrálva $[c, d]$-n:

$$\begin{aligned}\int_c^d \int_{l(y)}^{h(y)} \frac{\partial v_2}{\partial x}\,dx\,dy &= \int_c^d (v_2(h(y),y) - v_2(l(y),y))\,dy \\ &= \int_c^d v_2(h(y),y)\,dy - \int_c^d v_2(l(y),y)\,dy \\ &= \oint_\gamma v_2(r)\vec{j}\,dr.\end{aligned} \tag{350}$$

Így kapjuk, hogy

$$\iint_F \left(\frac{\partial v_2}{\partial x}\right) dy\,dx = \oint_\gamma v_2(r)\,dr. \tag{351}$$

A vonalintegrál linearitása miatt:

$$\oint_\gamma v(r)\,dr = \iint_F \left(\frac{\partial v_2}{\partial x} - \frac{\partial v_1}{\partial y}\right) dF. \tag{352}$$

Tétel: Green-tétel speciális esetben 2

Tekintsünk egy $F = \{(x,y) : a \le x \le b, c \le y \le d\}$ síkbeli téglalapot. {Fte:Green.tetel.spec.eset2} Jelölje

$$\gamma_1 : y = c \qquad a \le x \le b, \tag{353}$$
$$\gamma_2 : x = b \qquad c \le y \le d, \tag{354}$$
$$\gamma_3 : y = d \qquad b \ge x \ge a, \tag{355}$$
$$\gamma_4 : x = a \qquad d \ge y \ge c, \tag{356}$$

az téglalapot határoló görbéket a megfelelő irányítással. Legyen

$$\gamma = \gamma_1 \cup \gamma_2 \cup \gamma_3 \cup \gamma_4. \tag{357}$$

Tegyük fel, hogy $v = v_1\vec{i} + v_2\vec{j}$ folytonosan differenciálható vektormező $F \cup \gamma$-n. Ekkor

$$\oint_\gamma v(r)\,dr = \iint_F \left(\frac{\partial v_2}{\partial x} - \frac{\partial v_2}{\partial y}\right) dF. \tag{358}$$

Bizonyítás:

A Green-tétel speciális esetben 1-hez teljesen hasonló gondolatmenettel adódik, ugyanis az y és az x a γ_1, γ_3 illetve a γ_2, γ_4 görbéken konstans, ezért a vonalintegráljuk itt 0.

Bizonyítás:

Rátérünk a Stokes-tétel vázlatos, szemléletes bizonyítására. Osszuk fel az F felületet (kicsiny) síknak tekinthető négyzetek $\{T_i\}$ hálózatára. Legyenek $\gamma_i^1, \gamma_i^2, \gamma_i^3$ és γ_i^4 egy ilyen négyzet határoló görbéi a megfelelő pozitív irányítással. Legyen

$$\gamma_i = \gamma_i^1 \cup \gamma_i^2 \cup \gamma_i^3 \cup \gamma_i^4. \tag{359}$$

Alkalmazzuk erre a négyzetre a speciális Green-tételt. Ekkor

$$\oint_{\gamma_i} v(r)\,dr = \sum_{i=1}^n v(r)\,dr = \iint_{T_i} \operatorname{rot} v(r) \cdot dT_i. \tag{360}$$

Összegezzük a felírt közelítést az összes négyzetre, a belső oldalaknál (az irányítás miatt) a vonalintegrálok kiejtik egymást, csak a határgörbén vett összeg marad. A felosztás finomításával kapjuk:

$$\oint_{F \text{ perem}} v(r)\, dr = \iint_F \operatorname{rot} v(r)\, dF. \tag{361}$$

Megjegyzés:
A Green-tételnek (is) számos alkalmazása van. Például alkalmazható zárt görbék által határolt tartomány területének kiszámítására. Legyen ugyanis

$$v(r) = -y\vec{i} + x\vec{j} \tag{362}$$

és γ zárt, reguláris síkgörbe, valamint T a γ által határolt Jordan-mérhető tartomány. Ekkor

$$\lambda(T) = \frac{1}{2}\oint_\gamma v(r)\, dr. \tag{363}$$

Görbe által határolt tartomány területe

{Fmi:gorbe.alt.hat.tart.ter.

Mintafeladat: Görbe által határolt tartomány területe
Legyenek $a > 0$ és $b > 0$ adott számok. Számítsuk ki az

$$r(t) = a\cos(t)\vec{i} + b\sin(t)\vec{j} \qquad t \in [0, 2\pi] \tag{364}$$

görbe által határolt korlátos tartomány területét.

Megoldás:
Javaslat:
Legyen $v(r) = -y\vec{i} + x\vec{j}$ és alkalmazzuk a Green-tételt.
Lépés:
Az a és b féltengelyű ellipszis T területére kapjuk:

$$\lambda(T) = \frac{1}{2}\oint_\gamma v(r)\, dr. \tag{365}$$

Javaslat:
Számítsuk ki a vonalintegrált.
Lépés:

$$\dot{r}(t) = -a\sin(t)\vec{i} + b\cos(t)\vec{j} \tag{366}$$

$$v(r(t)) = -b\sin(t)\vec{i} + a\cos(t)\vec{j} \tag{367}$$

$$\frac{1}{2}\oint_\gamma v(r)\, dr = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} v(r(t))\cdot\dot{r}(t)\, dt = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} ab\, dt = \frac{1}{2}2ab\pi = ab\pi. \tag{368}$$

A Stokes tétel szemléltetése

{Fmi:Stokes.tetel.szemleltet

Mintafeladat: A Stokes tétel szemléltetése
Szemléltessük a Stokes tételt a

$$v(r) = x^2\vec{i} + y^2\vec{j} + xyz\vec{k} \tag{369}$$

vektormező és azon γ görbe segítségével, amelynek egy paraméterezése

$$r(t) = \cos(t)\vec{i} + \sin(t)\vec{j} + 1\vec{k} \qquad t \in [0, 2\pi]. \tag{370}$$

Megoldás:
Javaslat:
Számítsuk ki a $v(r)$ vektormezőnek a γ görbén vett vonalintegrálját! Lokalizáljuk a vektormezőt az adott görbe mentén.
Lépés:

$$v(r(t)) = \cos^2(t)\vec{i} + \sin^2(t)\vec{j} + \sin(t)\cos(t)\vec{k}. \tag{371}$$

Javaslat:
Most határozzuk meg a görbe paraméterezésének az idő szerinti deriváltját.
Lépés:

$$\dot{r}(t) = -\sin(t)\vec{i} + \cos(i)\vec{j} + 0\vec{k}. \tag{372}$$

Javaslat:
Számoljuk ki a skaláris szorzatot, amit később integrálni kell.
Lépés:

$$\begin{aligned} v(r(t)) \cdot \dot{r}(t) &= (\cos^2(t)\vec{i} + \sin^2(t)\vec{j} + \sin(t)\cos(t)\vec{k}) \cdot (-\sin(t)\vec{i} + \cos(i)\vec{j} + 0\vec{k}) \\ &= -\sin(t)\cos^2(t) + \cos(t)\sin^2(t). \end{aligned} \tag{373}$$

Javaslat:
Számítsuk ki az integrált.
Lépés:

$$\begin{aligned} \int_\gamma v(r)\,dr &= \int_0^{2\pi} v(r(t)) \cdot \dot{r}(t)\,dt \\ &= \int_0^{2\pi} \Big(-\sin(t)\cos^2(t) + \cos(t)\sin^2(t)\Big)\,dt \end{aligned}$$

az integrandusok $f' \cdot f^2$ típusúak

$$= \left[\frac{\cos(t)}{3} + \frac{\sin(t)}{3}\right]_0^{2\pi} = 0. \tag{374}$$

Javaslat:
Alkalmasan választott felület esetén számítsuk ki a $v(r)$ vektormező ezen felületen vett felületi integrálját!
Lépés:
Tekintsük a $z = 1$ síkban fekvő 1 sugarú, z tengelyen fekvő középpontú

körlemezt. (Ez a legegyszerűbb olyan felület, amely eleget tesz a Stokes-tétel feltételeinek)

$$F : r(u, v) = u\cos(v)\vec{i} + u\sin(v)\vec{j} + 1\vec{k} \qquad (u, v) \in [0, 1] \times [0, 2\pi]. \tag{375}$$

Javaslat:
Számítsuk ki a felület paraméterezését leíró vektor-skalár függvény parciális deriváltjainak vektoriális szorzatát!
Lépés:

$$r'_u(u, v) = \cos(v)\vec{i} + \sin(v)\vec{j} + 0\vec{k} \tag{376}$$
$$r'_v(u, v) = -u\sin(v)\vec{i} + u\cos(v)\vec{j} + 0\vec{k} \tag{377}$$

Így

$$\begin{aligned} r'_u(u, v) \times r'_v(u, v) &= \det\begin{pmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \cos(v) & \sin(v) & 0 \\ -u\sin(v) & u\cos(v) & 0 \end{pmatrix} \\ &= 0\vec{i} + 0\vec{j} + \Big(u\cos^2(v) + u\sin^2(v)\Big)\vec{k} = 0\vec{i} + 0\vec{j} + u\vec{k}. \end{aligned} \tag{378}$$

Javaslat:
Vizsgáljuk meg a felületi normálvektor irányítását!
Lépés:
Mivel az $u \in [0, 1]$, ezért a felületi normálvektor felfelé mutat, így az irányítása megfelelő, azaz irányából nézve a γ pozitív irányítású.
Javaslat:
Számítsuk ki a $v(r)$ vektormező rotációját!
Lépés:

$$\operatorname{rot} v(r) = \det\begin{pmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ x^2 & y^2 & xyz \end{pmatrix} = xz\vec{i} - yz\vec{j} + 0\vec{k}. \tag{379}$$

Javaslat:
Lokalizáljuk a $\operatorname{rot} v(r)$ vektormezőt a felületen.
Lépés:

$$\operatorname{rot} v(r(u, v)) = u\cos(v)\vec{i} - u\sin(v)\vec{j} + 0\vec{k}. \tag{380}$$

Javaslat:
Most számítsuk ki a skaláris szorzatot.
Lépés:

$$(\operatorname{rot} v(r(u, v)))\cdot(r'_u(u, v) \times r'_v(u, v)) = \Big(u\cos(v)\vec{i} - u\sin(v)\vec{j} + 0\vec{k}\Big)\cdot\Big(0\vec{i} + 0\vec{j} + u\vec{k}\Big) = 0. \tag{381}$$

Javaslat:
Számítsuk ki az integrált.
Lépés:

$$\begin{aligned} \iint_F \operatorname{rot} v(r)\, dF &= \int_0^1 \int_0^{2\pi} (\operatorname{rot} v(r(u, v))) \cdot (r'_u(u, v) \times r'_v(u, v))\, dv\, du \\ &= \int_0^1 \int_0^{2\pi} 0\, dv\, du = 0. \end{aligned} \tag{382}$$