

# Matematika szigorlat szóbeli tételsor

Gépészmérnök BSc, Ipari termék- és formatervező mérnök BSc

2023/24/1

A (fakultatív) szóbeli vizsgán minden vizsgázó egy 'A' (elméleti) és egy 'B' (alkalmazott) tételt kap, különböző témakörökből. Kidolgozási idő után a hallgató szóban beszámol a tudásáról, majd a két tételből együttesen kap egy osztályzatot. A hallgatótól bizonyításokat nem kérjük, de a definíciók és tételek pontos kimondását igen.

## 1. A (elméleti) tételek

1. **Numerikus sorozatok.** Véges és végtelen határérték fogalma, a határérték egyértelműsége. Konvergencia, divergencia. Korlátos sorozat fogalma, korlátosság kapcsolata a konvergenciával. Határértékek tulajdonságai. Monoton növekvő ill. csökkenő sorozat fogalma. Monotonitás, korlátosság és konvergencia kapcsolata. Rendőr elv.
2. **Egyváltozós valós értékű függvények határértéke és folytonossága.** Határérték fogalma (véges és végtelen) adott pontban és a végtelenben. Határértékek tulajdonságai. Bal- és jobboldali határérték, kapcsolatuk a határértékkal. Folytonosság fogalma. Folytonos függvények tulajdonságai. Weierstrass tétele, Bolzano tétele.
3. **Egyváltozós, valós értékű függvények deriválása.** Pontbeli deriválhatóság, deriváltfüggvény, deriválható és folytonosan deriválható függvény fogalma. Deriválhatóság és folytonosság kapcsolata. Deriválási szabályok. Rolle tétele, Lagrange tétele.
4. **Egyváltozós függvények integrálja.** Határozatlan integrál és primitív függvény fogalma, primitív függvények különbsége. Integrálás tulajdonságai. Intervallum felosztása, felső és alsó Riemann összeg, Riemann integrálhatóság fogalma. Monotonitás és integrálhatóság kapcsolata. Folytonosság és integrálhatóság kapcsolata. Integrálfüggvény fogalma és tulajdonságai.
5. **Komplex számok és polinomok.** Komplex szám: algebrai alak, valós és képzetes rész, összeadás, szorzás, konjugálás, abszolút érték, hányados kiszámítása. Trigonometrikus alak: áttérés algebraiból és vissza. Műveletek trigonometrikus alakkal: szorzás, hányados, hatványozás, gyökvonás. Polinomok: algebra alaptétele, komplex együtthatós polinomok szorzattá alakítása. Gyök konjugáltjának tulajdonsága. Valós együtthatós polinomok szorzattá alakítása. Komplex és valós együtthatós polinomok felírása a gyökeik segítségével.
6. **Mátrixok.** Műveletek mátrixokkal. Determináns. Lineárisan összefüggő vektorok fogalma, mátrix rangja. Mátrix inverze. Kapcsolat a mátrix rangja, determinánsa, inverze és a hozzá tartozó lineáris egyenletrendszer megoldhatósága között. Sajátértékek, sajátvektorok.
7. **Vektorterek.** Vektortér fogalma. Altér, generált altér, generálórendszer, bázis, ortogonális és ortonormált bázis fogalmi. Lineáris leképezés, példák. Mag- és képtér, dimenziótétel.
8. **Függvénysorok.** Függvénysorozat pontonkénti és egyenletes konvergenciája. Függvénysorok. Hatványsorok. Konvergenciaintervallum. Taylor sor. Fourier sor, páros és páratlan függvények esete.
9. **Többváltozós skalárfüggvények.** Definíció, kétváltozós függvények geometriai jelentése. Határérték, folytonosság. Parciális derivált, gradiens és geometriai jelentése, Young tétel. Iránymenti derivált és kiszámítása, geometriai jelentése.

10. **Tenzorok.** Tenzor fogalma. Linearitás szükséges feltétele. Tenzor mátrixának felírása. Skalárinvariánsok. Szimmetrikus és antiszimmetrikus mátrix, tenzor szimmetrikus és antiszimmetrikus részének kiszámítása. Kereszttenzor. Vektorinvariáns és kiszámítása.
11. **Vektorfüggvények analízise.** Vektormező fogalma, koordinátafüggvények. Vektormező határértéke, folytonossága, kapcsolat a koordinátafüggvények határértékével, folytonosságával. Deriválhatóság, deriválttenzor, Jacobi-mátrix. Kapcsolat a folytonossággal. Tenzorok deriváltja. Divergencia, rotáció és szemléletes jelentésük. Forrásmentesség, örvénymentesség. Nabla szimbolika. Laplace operátor.
12. **Differenciálegyenletek alapfogalmi.** Közönséges és parciális differenciálegyenlet. Explicit és implicit egyenlet. Egyenlet rendje. Homogén és inhomogén egyenlet. Lineáris és nemlineáris egyenlet. Kezdeti érték feladat, a kezdeti érték fizikai jelentése. Peano-tétel. Picard-Lindelöf tétel.
13. **Lineáris differenciálegyenlet-rendszerek.** Lineáris (inhomogén) differenciálegyenlet-rendszer fogalma. Homogén/inhomogén egyenlet, állandó együtthatós egyenlet. Függvények lineáris függetlensége és összefüggősége. Wronski-determináns. Függetlenség elégséges feltétele. Alaprendszer, alapmátrix. Homogén egyenlet megoldásának alakja. Egyszerű szerkezetű mátrix fogalma, a megoldás előállítása az esetükben. "Nem egyszerű" szerkezetű mátrixú egyenlet megoldása általánosított sajátvektorral. Állandók variálásának módszere inhomogén egyenletrendszerekre.

## 2. B (alkalmazott) tételek

1. **Nevezetes határértékek.**  $\lim_{n \rightarrow \infty} n^k$ ,  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{c}$ ,  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n}$ ,  $\lim_{n \rightarrow \infty} q^n$ , korlátos és nullába tartó sorozat szorzata,  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ .
2. **Függvények határértékei.** A  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x)}{x}$  határérték. Korlátos és nullába tartó függvények szorzata. A  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$  határérték. Folytonosság vizsgálata a határértékek segítségével. Szakadás fogalma, elsőfajú (megszüntethető, ugrás) és másodfajú szakadás.
3. **Egyváltozós függvények deriváltjának alkalmazásai.** Implicit függvény deriváltja, a vízszintes és függőleges érintő jelentése. Érintő egyenlete. L'Hospital szabály. Taylor polinom, Lagrange-féle maradéktag. Paraméteres görbék: első és második derivált kiszámítása.
4. **Egyváltozós függvényvizsgálat.** Függvény deriváltja és monotonitása közötti kapcsolat. Konvexitás és második derivált közötti kapcsolat. Szélsőértékek definíciói, elsőrendű (szükséges) és másodrendű (elégséges) feltétel a létezésükre. Inflexiós pont definíciója, létezésének elégséges feltétele. Példa, amikor a tételek nem alkalmazhatók.
5. **Egyváltozós függvények integrálja.** Parciális integrálás. Racionális törtefüggvények integrálja. Helyettesítéses integrál. Newton-Leibniz tétel. Parciális határozott integrálás. Improporius integrál: nem korlátos intervallum és nem korlátos függvény esetei.
6. **Lineáris egyenletrendszerek.** Gauss-elimináció. Az oszlop- és sorműveletek hatása a mátrix rangjára, determinánsára és a megoldásokra. Mátrix inverzének kiszámítása Gauss-eliminációval, illetve az adjungáltmátrix segítségével.
7. **Valós numerikus sorok.** Konvergencia fogalma. A  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^c}$  sor konvergenciája. Geometriai sor, alternáló sor, feltételek a konvergenciára. Kritériumok pozitív sorokra: hányados, gyök, integrál, majoráns, minoráns. Hibabecslés Leibniz és pozitív sorok esetén.

8. **Többváltozós skalárfüggvény szélsőértékvizsgálata.** Jacobi mátrix. Lokális szélsőérték fogalma, Létezésének szükséges, illetve elégséges feltétele. Feltételes szélsőérték keresése Lagrange multiplikátorokkal.
9. **Kettő- és háromváltozós skalárfüggvény integrálja.** Kettős- és hármasintegrál definíciója, tulajdonságok. Integrálás téglalapon és normáltartományon. Polár, henger és gömbi koordináták, alkalmazásuk az integrálszámításban.
10. **Vonalintegrál.** Görbe fogalma. Törött vonal (poligon), beírt poligon. Ívhossz, rektifikálható görbe fogalma. Egyszerű görbe, zárt egyszerű görbe. Egyszerű görbe paraméterezése. Elégséges feltételek rektifikálhatóságra. Vonallintegrál fogalma, kiszámítása. Tulajdonságok: lineáris, végesen additív, fordított irányítás. Potenciálosság, potenciálfüggvény. Konzervatív vektormező, kapcsolata a vonallintegrállal. Newton-Leibniz formula vonallintegrálra. Potenciálosság, konzervativitás és rotáció kapcsolata.
11. **Felületi integrál.** Paraméterezett felület fogalma. Egyszerű felületdarab, irányított egyszerű felületdarab. Reguláris felület fogalma. Zárt felület fogalma. Felületi integrál (fluxus) fogalma. Tulajdonságok: lineáris, végesen additív, ellentétes irányú normálvektor. Gauss-Osztrogradszkij tétel, Stokes tétel.
12. **Differenciálegyenletek megoldási módszerei.** Szétválasztható egyenlet és megoldása, szinguláris megoldás. Homogén fokszámú egyenlet és megoldása. Elsőrendű (inhomogén) lineáris egyenlet és megoldása: állandók variálása, próbafüggvény módszer. Bernoulli-féle egyenletek és megoldásuk. Egzakt egyenletek és megoldásuk.
13. **Magasabb fokú differenciálegyenletek.** Magasabb fokú lineáris egyenletek fogalma. Átviteli elv. Másodrendű homogén egyenlet megoldása: karakterisztikus egyenlet, a megoldás felírása két valós, két komplex és többszörös gyök esetén. Inhomogén egyenlet megoldása: állandók variálása, próbafüggvény módszer. Kétszeres rezonancia.

Budapest, 2023. augusztus

Takács Bálint Máté  
előadó