Matematika G1 2023/24/2

Szóbeli tételsor

1. Numerikus sorozatok: véges és végtelen határérték fogalma, a határérték egyértelműsége. Konvergencia, divergencia. Korlátos sorozat fogalma, korlátosság kapcsolata a konvergenciával.

2. Határértékek tulajdonságai. Monoton növekvő ill. csökkenő sorozat fogalma. Monotonitás, korlátosság és konvergencia kapcsolata (bizonyítással). Rendőr elv.

3. Nevezetes határértékek: $\lim\limits_{n\to\infty} n^k$, $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{c}$ (bizonyítással), $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n}$, $\lim\limits_{n\to\infty} q^n$ (bizonyítással), korlátos és nullába tartó sorozat szorzata, $\lim\limits_{n\to\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$.

4. Bolzano-Weierstrass tétel. Módosított sorozatok konvergenciája. Torlódási pontok, infimum, szuprémum, limsup, liminf.

5. Polinomok, szorzattá alakítás menete egész együtthatós polinomok esetén. Exponenciális függvény. Trigonometrikus függvények és inverzeik. Hiperbolikus függvények definíciója és képe, geometriai jelentés.

6. Függvénytulajdonságok: páros, páratlan, monoton növekvő, monoton csökkenő, konvex, konkáv, periodikus, példák. Zérushely fogalma.

7. Függvények határértéke (véges és végtelen) adott pontban és a végtelenben. Határértékek tulajdonságai. Bal- és jobboldali határérték, kapcsolatuk a határértékkel. A $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin(x)}{x}$ határérték. Korlátos és nullába tartó függvények szorzata. A $\lim\limits_{x\to\infty} \left(1+\frac{1}{x}\right)^x$ határérték.

8. Folytonosság fogalma. Folytonos függvények tulajdonságai. Weierstrass tétele, Bolzano tétele. Szakadás fogalma, elsőfajú (megszüntethető, ugrás) és másodfajú szakadás.

9. Pontbeli deriválhatóság, deriváltfüggvény, deriválható és folytonosan deriválható függvény fogalma. Deriválhatóság és folytonosság kapcsolata.

10. Deriválási szabályok: $f(x)+g(x)$ (bizonyítással), $f(x)\cdot g(x)$, $c\cdot f(x)$, $\frac{f(x)}{g(x)}$, $f(g(x))$. Nevezetes deriváltak: konstansfüggvény, polinom (bizonyítással), exponenciális, logaritmus, szinusz, koszinusz, hiperbolikus függvények.

11. Implicit függvény deriváltja, a vízszintes és függőleges érintő jelentése. Érintő egyenlete. L'Hopsital szabály.

12. Rolle tétele, Lagrange tétele (bizonyítással). Függvény deriváltja és monotonitása közötti kapcsolat (bizonyítással).

13. Konvexitás és második derivált közötti kapcsolat. Szélsőértékek definíciói, elsőrendű (szükséges) és másodrendű (elégséges) feltétel a létezésükre. Inflexiós pont definíciója, létezésének elégséges feltétele. Példa, amikor a tételek nem alkalmazhatók.

14. Taylor polinom, Lagrange-féle maradéktag. Tetszőleges középpontú kör, hiperbolaág, ciklois és lemniszkáta paraméteres egyenletei és levezetésük. Paraméteres görbék: első és második derivált kiszámítása.

15. Határozatlan integrál és primitív függvény fogalma, primitív függvények különbsége (bizonyítással). Integrálás tulajdonságai, fontosabb függvények integráljai. Parciális integrálás (bizonyítással).

16. Racionális törtfüggvények integrálja. Helyettesítéses integrál. Intervallum felosztása, felső és alsó Riemann összeg, Riemann integrálhatóság fogalma. Monotonitás és integrálhatóság kapcsolata. Folytonosság és integrálhatóság kapcsolata.

17. Newton-Leibniz tétel (bizonyítással). Parciális határozott integrálás. Integrálfüggvény fogalma és tulajdonságai.

18. Improporius integrál: nem korlátos intervallum és nem korlátos függvény esetei. Határozott integrálás alkalmazásai: területszámítás, ívhossz, forgástest felszíne és térfogata (alkalmazással).

19. Komplex szám: algebrai alak, valós és képzetes rész, összeadás, szorzás, konjugálás, abszolút érték, hányados kiszámítása. Trigonometrikus alak: áttérés algebraiból és vissza. Műveletek trigonometrikus alakkal: szorzás, hányados, hatványozás, gyökvonás.

20. Polinomok: algebra alaptétele, komplex együtthatós polinomok szorzattá alakítása. Gyök konjugáltjának tulajdonsága. Valós együtthatós polinomok szorzattá alakítása. Komplex és valós együtthatós polinomok felírása a gyökeik segítségével.

Budapest, 2024. február

Takács Bálint Máté
előadó