Matematika G1 2022/23/2

Beadható szorgalmi feladatok

Határidő:

- Az 1-5. feladatok határideje: 9. hét szerdai előadás
- Az 6-10. feladatok határideje: 13. hét szerdai előadás

1. **Sorozatok módosítása.** Adjunk példát (ha lehet) olyan sorozatra, amikor az eredeti sorozathoz végtelen sok elem hozzáírásával

   a) az eredeti konvergens sorozat divergenssé válik,

   b) az eredeti konvergens sorozat konvergens marad és a határértéke nem változik,

   c) az eredeti konvergens sorozat konvergens marad és a határértéke megváltozik,

   d) az eredeti divergens sorozat konvergenssé válik.

   Ha nem lehet elvégezni valamelyik műveletet, indokoljuk meg, miért nem! (részenként 0,5 pont)

2. **Az ókori görögök és a $\sqrt{2}$.** Az ókori görögök által is ismert volt az az állítás, hogyha tekintjük az alábbi (rekurzív) sorozatot:

$$a_0 = 2, \qquad a_{n+1} = \frac{a_n + \dfrac{2}{a_n}}{2},$$

   akkor $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \sqrt{2}$. Bizonyítsuk be ezt az állítást!

   A fenti szabályt átírhatjuk az $a_{n+1} = f(a_n)$ alakba is, és a bizonyítás lépései pedig legyenek:

   a) Lássuk be, hogy $a_n \geq \sqrt{2}$. Ehhez bizonyítsuk, hogy $f(x) \geq \sqrt{2}$ ha $x > 0$. (1 pont)

   b) Lássuk be, hogy az a_n sorozat monoton csökkenő $a_n \geq \sqrt{2}$ esetén, azaz ha $a_n \geq \sqrt{2}$, akkor $a_n \geq a_{n+1}$. (1 pont)

   c) Határozzuk meg az f függvény fixpontját, azaz azon x_0 pontot, amelyre $f(x_0) = x_0$. (0,5 pont)

   d) A bizonyítás befejezéséhez használjuk az alábbi tételt: ha $a_{n+1} = f(a_n)$, f folytonos $(0, \infty)$-n, $f(x_0) = x_0$ ($x_0 \in (0, \infty)$) és a_n konvergens, akkor $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = x_0$. (0,5 pont)

   (Megjegyzés: a feladat más módokon is belátható, például a Banach-féle fixpont-tétel alkalmazásával.)

3. **Speciális függvények.** Adjuk meg az összes olyan $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvényt, mely

   a) mindenhol monoton nő és monoton csökkenő egyszerre! (0,5 pont)

   b) mindenhol konkáv és konvex egyszerre! (0,5 pont)

   c) mindenhol szigorúan monoton nő és szigorúan monoton csökkenő egyszerre! (Tipp: nem muszáj, hogy mindenhol értelmezve legyen a függvény!) (0,5 pont)

   d) bármely $p \in \mathbb{R}$ érték a periódusa! (0,5 pont)

4. **Egész számokon értelmezett függvény folytonossága.** Tekintsük az alábbi függvényt: $f : \mathbb{Z}^+ \to \mathbb{R}$, $f(x) = (-1)^x$. Lássuk be, hogy a tanult definíció szerint ezt folytonos függvény! (2 pont)

5. **Végtelen sok szakadású függvény.** Adjunk meg egy olyan $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ($\mathrm{Dom}(f) = \mathbb{R}$) függvényt, amelynek

   a) végtelen sok elsőfajú és végtelen sok másodfajú szakadása van! (0,5 pont)

   b) végtelen sok elsőfajú szakadása van, és ezek mind egy korlátos $[a, b]$ intervallumban találhatók! (0,5 pont)

6. **A $\cos(x-1)$ függvény Taylor polinomja.** Tekintsük az $f(x) = \cos(x-1)$ függvényt ($f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$).

   a) Adjuk meg a függvény n-edfokú Taylor polinomját az $a = 1$ pont körül! (1 pont)

   b) Közelítsük a $\cos(2)$ értékét a másod-, negyed- és tizedfokú Taylor polinomokkal! Mekkorák ekkor a hibák (a pontos értéket számíthatjuk számológép segítségével)! (1 pont)

7. **Parciális integrálási paradoxon.** Tekintsük az alábbi érvelést:
   Legyen $x > 0$! Ekkor parciális integrálást használva

$$\int \frac{1}{x}\frac{1}{\ln(x)}dx = \ln(x)\frac{1}{\ln(x)} - \int \ln(x)\frac{-1}{(\ln(x))^2}\frac{1}{x}dx = 1 + \int \frac{1}{\ln(x)}\frac{1}{x}dx.$$

   Mindkét oldalból kivonva az $\int \frac{1}{x}\frac{1}{\ln(x)}dx$ tagot kapjuk, hogy $0 = 1$.

   Hol a hiba? (2 pont)

8. **Nehéz integrál.** Számítsuk ki az alábbi határozatlan integrált!

$$\int \frac{1}{1+x^4}\,\mathrm{d}x$$

   A megoldás lépései:

   a) Bontsuk fel az $1+x^4$ kifejezést $(x^2+ax+b)(x^2-ax+b)$ alakban, azaz számítsuk ki az a és b konstansok értékét! (0,5 pont)

   b) A parciális törtekre bontáshoz hasonlóan bontsuk fel a hányadost két egyszerűbb hányados összegére! (1 pont)

   c) Az így kapott két tagot alakítsuk úgy (új tagok hozzáadásával), hogy lehessen használni a tanult módszereket! (1,5 pont)

9. **Nem Riemann-integrálható függvény.** Tekintsük az alábbi módon definiált $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ függvényt:

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{ha } x \text{ irracionális,} \\ 0, & \text{ha } x \text{ racionális.} \end{cases}$$

   Lássuk be, hogy ez nem Riemann-integrálható! (2 pont)

10. **Gábriel harsonája módosítva.** Tekintsük az alábbi $f : (1, \infty) \to \mathbb{R}$ függvényt: $f(x) = x^{-\alpha}$ ahol $\alpha \in \mathbb{R}^+$. Mely $\alpha \neq 1$ értékek esetén kapunk az előadáson bemutatott Gábriel harsonájához hasonló paradoxont, azaz mely $\alpha \neq 1$ értékek esetén lesz a függvény görbéjének az x tengely körüli megforgatásával kapott forgástest térfogata véges, de felszíne végtelen? (4 pont)