A kvantumelmélet matematikai alapjai

A tárgy célja:

A tárgy fizika BSc hallgatóknak ajánlott a 4. félévben, a Kvantummechanika 1 tárggyal párhuzamosan. A cél a Kvantummechanika 1 tárgyban használt funkcionálanalízisbeli fogalmak, eredmények, és technikák matematikailag precíz tárgyalása, ennek a fizikai elmélet mélyebb megértésében játszott szerepének megvilágítása, az absztrakt matematikai és a fizikai elmélet szoros kapcsolatának bemutatása. A tárgy különbözik a szokásos matematikus funkcionálanalízis tárgyaktól, amennyiben nagy hangsúlyt fektet a matematikai fogalmak fizikai motivációjára, szinte kizárólag Hilbert-terekkel foglalkozik, és nagyon hamar rátér a kvantumelméletben fontos nemkorlátos operátorokra és ezek spektrálelméletére, amelyek a szokásos felépítésben nem kerülnek elő egy bevezető kurzusban. Ennek ára, hogy bizonyos tételek bizonyítása kimarad, vagy csak vázlatosan szerepel (pl. a spektráltételé, amely önmagában egy külön féléves tárgy anyaga lehetne), illetve az egyszerűbb bizonyítások egy része megfelelő útmutatásokkal fakultatív házi feladatként kerül kiadásra (l. alább), így a hallgatók az egyéni érdeklődésüktől függően mélyedhetnek el a bizonyítások részleteiben. Ugyanakkor az alapfogalmak teljes részletességgel és precizitással kerülnek tárgyalásra, megfelelő alapot biztosítva ahhoz, hogy az érdeklődő hallgatók tanulmányozni tudjanak a kvantumfizika matematikai alapjaival, illetve a kvantumfizika matematikailag precíz tárgyalásával foglalkozó haladóbb könyveket és cikkeket is. A tárgy nagyon hasznos szemléletet és technikai tudást ad a kvantum-információelméleti tárgyak elvégzéséhez is.

Struktúra:

Heti 2 óra előadás és 1 óra gyakorlat, 4 kredit. Minden előadáson kiadásra kerül két feladatsor a következő heti gyakorlatra: az első gyakorló feladatokat tartalmaz, az ezekre kapott jegy bizonyos súllyal beleszámít a félév végi jegybe. A második feladatsor elméletibb, az itt elért pontszám alapján megajánlott vizsgajegyet lehet szerezni. A feladatok megoldásait a következő heti gyakorlat elejéig kell beadni, a gakorlaton ezek, és kapcsolódó kérdések részletes megbeszélése történik.

Tematika:

(1) Klasszikus valószínűségi modellek. Mérhető terek, valószínűségi mérték, éles mérések, függvények mérhetősége, valószínűségi változó eloszlása, mérési statisztika modellezése. Borel σ-algebra, Lebesgue-mérték definíciója. Mérési eredmények várható értéke, szórása, az integrál definíciója, alapvető integrál-tételek. Véges dimenziós klasszikus modellek mátrix formalizmusban, véges és végtelen dimenziós kvantum modellek matematikai motivációja.

(2) Norma és skalárszorzat, $l^p([d])$, $l^p(\mathbb{N})$ és absztrakt L^p-terek. Teljesség jellemzése abszolút konvergens sorozatokkal, L^p-terek teljessége. Normák ekvivalenciája, végesdimenziós normált terek.

(3) Nyílt és zárt halmazok, sűrű alterek, sűrűn értelmezett lineáris operátorok. Lineáris operátorok korlátossága és folytonossága. Hilbert-terek direkt összege, operátor gráfja, zárt operátorok. Sajátérték és spektrum, peremfeltételek (értelmezési tartomány) hatása a spektrumra. Példák szorzás- és differenciálás operátorokkal.

(4) Hilbert-terek geometriája, zárt konvex halmazra vetítő projekció, ortokomplementum, ortogonális projekciók. Unitér és izometrikus operátorok, Hilbert-terek izometriája. Teljes ortonormált rendszerek, bázis szerinti kifejtés, operátorok mátrixa. Trigonometrikus bázis, polinom bázisok.

(5) Hilbert-terek duálisa, Riesz reprezentációs tétel, operátor adjungáltja, adjungált operátor gráfja és zártsága, önadjungált és szimmetrikus operátorok. A kvantummechanikai hely és lendület operátorok.

(6) Korlátos pozitív szemidefinit operátorok, pozitív szemidefinit rendezés. Projekciók rendezése. Pozitív szemidefinit operátorok nyoma, sűrűségoperátorok. Nyomszerű pozitív szemidefinit operátorok spektrálfelbontása (bizonyítás nélkül). Tiszta és kevert állapotok.

(7) Pozitív operátorok növő sorozatának határértéke, erős és gyenge operátortopológiák. Kvantummechanikai mérhető mennyiségek mint projektor-, illetve pozitív operátor értékű mértékek, sűrűségoperátor szerinti mérési valószínűségek. Gleason tétel (bizonyítás nélkül). A pozíció méréshez tartozó projektor értékű mérték.

(8) Mérési eredmények várható értéke és szórása, projektor értékű mérték szerinti integrál. Valós mérhető mennyiséghez tartozó operátor, mérhető mennyiség függvényei. Spektráltétel projektor értékű mértékes és szorzásoperátoros változata (bizonyítás nélkül). Nemkorlátos önadjungált operátor által generált unitér csoport, unitér csoport generátora.

(9) Fourier-transzformáció $L^2(\mathbb{R}^d)$-n, a lendülethez tartozó projektor értékű mérték.

(10) Együttes mérhetőség és inkompatibilitás, mérhető mennyiségek összegének problémája, látszólagos fizikai ellentmondások feloldása.

Ajánlott irodalom:

- Béla Bollobás: Linear Analysis, 2nd edition, Cambridge University Press, 1999.
- Gerald B. Folland: Real Analysis, 2nd edition, John Wiley & Sons, Inc., 1999.
- Brian C. Hall: Quantum Theory for Mathematicians, Springer, 2013.
- Matolcsi Tamás, Székely Sándor: Matematikai Fizika I., Tankönyvkiadó, Budapest, 1980.
- Petz Dénes: Lineáris Analízis, Akadémiai Kiadó, 2002.
- Michael Reed, Barry Simon: Methods of Modern Mathematical Physics I: Functional Analysis, Academic Press, 1980.
- Walter Rudin: Functional Analysis, 2nd ed., McGraw-Hill, 1991.
- Az előadáshoz készült gépelt jegyzet és feladatsor.