1, Komplex logaritmus

Def.: Logaritmus reláció: $\mathrm{Ln}\, z = \{ \ln|z| + i(\arg z + 2k\pi) \mid k \in \mathbb{Z} \}$

Ennek megszorítása a főága a logaritmus függvény: $z \neq 0$

$$\ln z = \ln|z| + i\varphi, \quad \text{ahol } z = |z| \cdot e^{i\varphi}, \quad -\pi < \varphi \leq +\pi, \quad z \neq 0$$

1.1, a, $\ln(-e) = ?$ b, $\mathrm{Ln}(2-2i) = ?$ c, $\ln(-3i) = ?$

d, $e^{(2+i)z} = i$; $z = ?$

Def.: $z \neq 0$ esetén $z^{w} = e^{w \ln z}$

1.2, a, $i^{2i} = ?$ b, $i^{1+i} = ?$ c, $(1+i)^{1-i} = ?$

2, Komplex számokkal megoldható geometriai feladatok

A következő feladatokban ugyanazzal a szimbólummal jelöljük a komplex számokat, és az adott komplex számot reprezentáló pontot a komplex számsíkon.

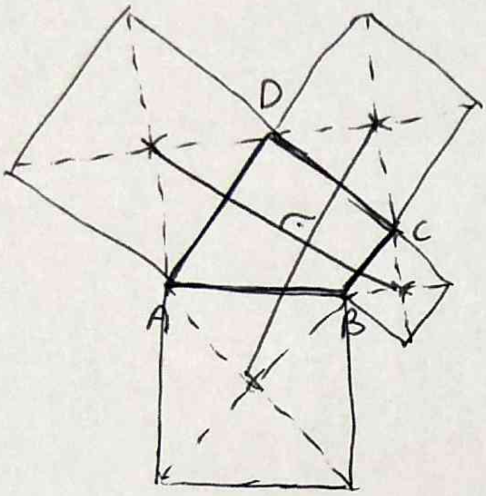
2.1, Adott $u, v \in \mathbb{C}$

a, Adja meg azokat a $z \in \mathbb{C}$ pontokat, melyre az $u\,v\,z\,\triangle$ egyenlő oldalú!

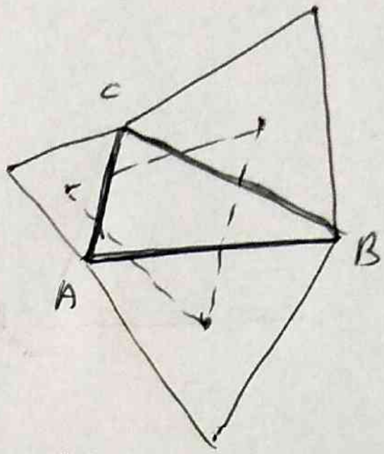
b, Adja meg azoknak a négyzeteknek a $z \in \mathbb{C}$ középpontjait, melyre u és v a négyzet két csúcsa! (Lehet szomszédos ill. átlós csúcspár is!)

A végeredményt adja meg paraméteresen, majd $u = 2+i$, $v = -1+3i$ esetén konkrétan, algebrai alakban!

2.2 Egy négyszög oldalaira kifelé négyzeteket rajzolunk. Kössük össze az átellenes négyzetek középpontjait. Igazoljuk, hogy e két szakasz merőleges, és egyenlő hosszú!



ábra 2.2-höz



ábra 2.3-hoz

2.3, Egy háromszög mindegyik oldalára kifelé egy-egy szabályos háromszöget rajzolunk. Igazoljuk, hogy ezek középpontjai szabályos háromszöget alkotnak!

3, Polinomok, az algebra alaptétele

3.1, $p(x) = 4x^4 + 20x^3 + 33x^2 + 8x - 15$

$q_1(x) = x^2 + 6x + 5$; $q_2(x) = x^2 + 2x - 1$

a, Végezze el a $p : q_1$ és a $p : q_2$ maradékos polinomosztást!

b, Írja fel $p(x)$-et gyöktényezők szorzataként a valós, és a komplex számtest fölött! (a, rész segít)

3.2, Írja fel a $p(x) = x^3 - x^2 + x - 1$ polinomot valós ill. komplex gyöktényezők szorzataként! (Próbálgatással keressen gyököt!)

3.3, Írja fel a $p(x) = x^6 + x^4 - x^2 - 1$ polinomot valós ill. komplex gyöktényezők szorzataként!

4, Lagrange interpoláció

4.1, $f(n) := \sum_{k=0}^{n} k^2$;

$f(0) = ?$; $f(1) = ?$; $f(2) = ?$; $f(3) = ?$

Lagrange - interpolációval határozza meg azt a $p(x)$ harmadfokú polinomot, amely illeszkedik a fenti négy pontra, majd teljes indukcióval igazolja, hogy

$\forall n \in \mathbb{N}$ esetén $f(n) = p(n)$!