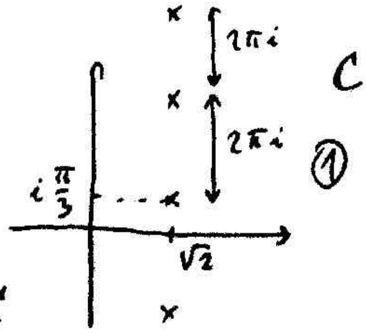
1, a, $\boxed{5}$

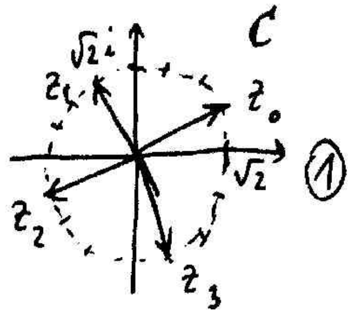
$1 + i\sqrt{3} = 2 \cdot e^{i\pi/3}$ 2

$z = \ln(2 \cdot e^{i\pi/3}) = \underline{\underline{\ln 2 + i\left(\frac{\pi}{3} + 2k\pi\right)}}$ 2 ; $k \in \mathbb{Z}$




b, $4i = 4 \cdot e^{i\pi/2}$ 2

$z = \sqrt{2} \cdot e^{i\left(\pi/8 + \frac{\pi}{2}k\right)}$ 2 , $k = 0, 1, 2, 3$




$z_0 = \sqrt{2}\cos\frac{\pi}{8} + i\sqrt{2}\sin\frac{\pi}{8} = -z_2$

$z_1 = -\sqrt{2}\sin\frac{\pi}{8} + i\sqrt{2}\cos\frac{\pi}{8} = -z_3$

---

2, $\boxed{10}$

$(x_0, y_0) = (0, 1)$ ; $(x_1, y_1) = (1, 0)$ ; $(x_2, y_2) = (3, 2)$

$l_0(x) = \frac{(x - x_1)(x - x_2)}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)}$ 1 $= \frac{(x-1)(x-3)}{(0-1)(0-3)} = \frac{x^2 - 4x + 3}{3}$ 1

$l_1(x) = \frac{(x-0)(x-3)}{(1-0)(1-3)} = \frac{x^2 - 3x}{-3}$ 2 , $l_2(x) = \frac{(x-0)(x-1)}{(3-0)(3-1)} = \frac{x^2 - x}{6}$ 2

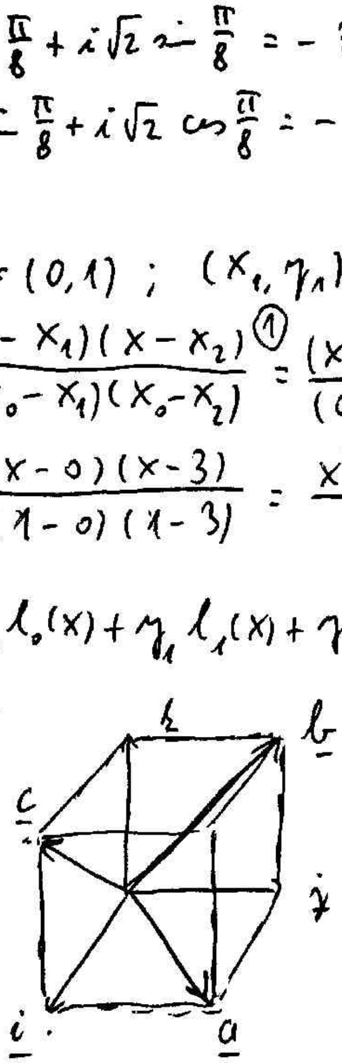
$L(x) = y_0 l_0(x) + y_1 l_1(x) + y_2 l_2(x)$ 2 $= \frac{x^2 - 4x + 3}{3} + 0 + \frac{x^2 - x}{3} = \underline{\underline{\frac{2x^2 - 5x + 3}{3}}}$ 2

---

3, $\underline{a} = \underline{i} + \underline{j}$

$\underline{b} = \underline{j} + \underline{k}$

$\underline{c} = \underline{k} + \underline{i}$




Az ábrán látható, hogy a kocka testátlója körüli 120°-os forgatás az $\underline{a} \to \underline{b} \to \underline{c}$ ; $\underline{i} \to \underline{j} \to \underline{k}$ módon mozgatja a vektorokat.

Tehát ennek a forgatásnak a tengelye $\underline{\underline{\underline{i} + \underline{j} + \underline{k}}}$ 2, szöge $\underline{\underline{120°}}$ 2.

mátrix: $\underline{\underline{\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}}}$. 6

4, Leolvasható az egyenletekből, hogy a két egyenes irányvektora:

$\boxed{10}$

$\underline{v}_e = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$; $\underline{v}_f = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$, tehát a keresett sík normálvektora:

$$\underline{n} = \underline{v}_e \times \underline{v}_f = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5 \\ -5 \\ 5 \end{bmatrix} = -5 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

A sík egyenlete tehát $x + y - z = C$ (6), ahol $C \in \mathbb{R}$ abból a feltételből kapható meg, hogy a sík a két egyenestől azonos távolságra van.

$e$ egy pontja: $\vec{A} = (1, 2, -5)$; $f$ egy pontja: $\vec{B} = (3, 3, 6)$, így a sík egy pontja $\frac{\vec{A} + \vec{B}}{2} = (2, \frac{5}{2}, \frac{1}{2})$, ez alapján $C = 2 + \frac{5}{2} - \frac{1}{2} = 4$. Tehát a sík egyenlete: $\boxed{x + y - z = 4}$ (4)

5, $\underline{a} \times (\underline{b} \times \underline{r}) = (\underline{a} \cdot \underline{r})\underline{b} - (\underline{a} \cdot \underline{b}) \cdot \underline{r}$, tehát

$$\left.\begin{aligned} A\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} &= a_1 \cdot \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \underline{a} \cdot \underline{b} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (2) \\ A\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} &= a_2 \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ \underline{a} \cdot \underline{b} \\ 0 \end{bmatrix} \quad (2) \\ A\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} &= a_3 \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \underline{a} \cdot \underline{b} \end{bmatrix} \quad (2) \end{aligned}\right\}$$

$$A = \begin{bmatrix} a_1 b_1 - \underline{a} \cdot \underline{b} & a_2 b_1 & a_3 b_1 \\ a_1 b_2 & a_2 b_2 - \underline{a} \cdot \underline{b} & a_3 b_2 \\ a_1 b_3 & a_2 b_3 & a_3 b_3 - \underline{a} \cdot \underline{b} \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} -a_2 b_2 - a_3 b_3 & a_2 b_1 & a_3 b_1 \\ a_1 b_2 & -a_1 b_1 - a_3 b_3 & a_3 b_2 \\ a_1 b_3 & a_2 b_3 & -a_1 b_1 - a_2 b_2 \end{bmatrix} =$$

(4)

$$= \underline{a} \circ \underline{b} - (\underline{a} \cdot \underline{b}) \cdot I$$

(Bármelyik alakot elfogadjuk.)

6, $A$ lineáris, hiszen

$(A(\alpha f + g))(x) = (\alpha f + g)(x + \frac{\pi}{3}) = \alpha f(x + \frac{\pi}{3}) + g(x + \frac{\pi}{3}) = \alpha (Af)(x) + (Ag)(x) =$

$= (\alpha Af + Ag)(x)$ $\forall x$-re, tehát $A(\alpha f + g) = \alpha Af + Ag$ ✓ (3)

$$\left.\begin{aligned} (A\varphi_0)(x) &= \varphi_0(x + \tfrac{\pi}{3}) = 1 \quad (1) \\ (A\varphi_1)(x) &= \varphi_1(x + \tfrac{\pi}{3}) = \sin x \cos\tfrac{\pi}{3} + \cos x \sin\tfrac{\pi}{3} = \tfrac{1}{2}\varphi_1(x) + \tfrac{\sqrt{3}}{2}\varphi_2(x) \quad (2) \\ (A\varphi_2)(x) &= \varphi_2(x + \tfrac{\pi}{3}) = \cos x \cos\tfrac{\pi}{3} - \sin x \sin\tfrac{\pi}{3} = \tfrac{1}{2}\varphi_2(x) - \tfrac{\sqrt{3}}{2}\varphi_1(x) \quad (2) \end{aligned}\right\} A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & -\sqrt{3}/2 \\ 0 & \sqrt{3}/2 & 1/2 \end{bmatrix}$$

(2)