Funkcionálanalízis Gyakorlatok

Szerkeszti: Tasnádi Tamás

2019. március 1.

Kivonat

A jegyzetbe többek között Andai Attila, Horváth Miklós, Mosonyi Milán, Petz Dénes, Pitrik József, Réffy Júlia, Ruppert László, Tasnádi Tamás, Weiner Mihály feladatai is bekerülnek.

Tartalomjegyzék

1. Lineáris terek **2**
1.1. Lineáris függetlenség, bázis, speciális mátrixok 2
1.2. Sajátérték, sajátvektor, spektrálfelbontás, mátrixok függvénye 3
1.3. Duális tér, transzponált, adjungált 4
1.4. Tenzorszorzat 5

2. Normált terek, Banach-terek **7**
2.1. Norma axiómái 7
2.2. Banach-terek 8
2.3. Fréchet- és Gâteaux-derivált 9
2.4. Funkcionálok és operátorok 10

3. Hilbert-terek és korlátos operátoraik **12**
3.1. A Hilbert-tér geometriája 12
3.2. Adjungált 12
3.3. Ortogonális polinomrendszerek 14
3.4. Topológiák 15
3.5. Kompakt operátorok 17
3.6. Spektrum, spektráltétel 17

4. Nemkorlátos operátorok **19**

5. Kvantummechanikai kitekintés **21**

1. Lineáris terek

1.1. Lineáris függetlenség, bázis, speciális mátrixok

1. Gyakorlat:
Alteret alkotnak-e $\mathbb{R}^3$-ben egy egyenes pontjai?

2. Gyakorlat:
Az $n \times n$-es komplex mátrixok $M_n(\mathbb{C})$ vektorterében komplex illetve valós alteret, csoportot, részalgebrát alkotnak-e a következő halmazok:

a) diagonális mátrixok;

b) önadjungált mátrixok;

c) unitér mátrixok;

d) normális mátrixok;

e) pozitív definit mátrixok;

f) egységnyi nyomú mátrixok;

g) felső háromszög mátrixok;

h) adott $A = A^* \in M_n(\mathbb{C})$-vel kommutáló mátrixok halmaza?

A felsorolt halmazok közül melyik konvex?

3. Gyakorlat:
Határozzuk meg az a, b, c, d, e paraméterek értékét úgy, hogy az $O = \frac{1}{7}\begin{pmatrix} 2 & -6 & a \\ -3 & 2 & b \\ c & d & e \end{pmatrix}$ mátrix irányítástartó, (ill. irányításváltó) ortogonális transzformáció legyen! Ezen paraméterértékek mellett mekkora szöggel forgat az O, (ill. irányításváltó esetben a $-O$) mátrix?

4. Gyakorlat:
Legyen $f_t(x) := e^{tx}$. Bizonyítsuk be, hogy $\{f_t : t \in \mathbb{R}\}$ lineárisan független rendszer az $\mathbb{R}$-en értelmezett végtelen sokszor differenciálható valós értékű függvények vektorterében!

5. Gyakorlat:
Adjuk meg az origóra való tükrözés, az x tengelyre való tükrözés és az xy síkra való tükrözés mátrixát $\mathbb{R}^3$ standard bázisában!

1.2. Sajátérték, sajátvektor, spektrálfelbontás, mátrixok függvénye

1. Gyakorlat:
Mik az

$$A = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

mátrix sajátértékei, sajátvektorai? Milyen leképezést ad meg ez a mátrix?

2. Gyakorlat:
Határozzuk meg a következő mátrixok sajátértékeit, sajátvektorait, spektrális projekcióit és spektrál felbontását!

$$\sigma_x = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \qquad \sigma_y = \begin{bmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{bmatrix}, \qquad \sigma_z = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

3. Gyakorlat:
Milyen transzformációt ír le az

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

mátrix? Határozzuk meg A sajátértékeit, sajátvektorait, spektrális projekcióit és spektrálfelbontását!

4. Gyakorlat:
Határozzuk meg az

$$A = \frac{\pi}{12}\begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 5 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

mátrix spektrálfelbontását valamint az $\arcsin(A)$ mátrixot!

5. Gyakorlat:
Határozzuk meg az

$$A = \frac{1}{5}\begin{bmatrix} 9 & -2 & 0 \\ -2 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 10 \end{bmatrix}$$

mátrix spektrálfelbontását valamint az e^A mátrixot!

1.3. Duális tér, transzponált, adjungált

1. Gyakorlat:

A végtelen valós sorozatok $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ vektorterében legyen $\mathbb{V}_0$ a véges sok nem nulla elemet tartalmazó sorozatok halmaza.

a) Igazoljuk, hogy $\mathbb{V}_0$ altér!

b) Adjunk meg $\mathbb{V}_0$-ban egy bázist!

c) Adjuk meg a $\mathbb{V}_0^*$ duális teret!

d) Igazoljuk, hogy $\mathbb{V}_0 \subsetneqq \mathbb{V}_0^{**}$, azaz bizonyítsuk, hogy $\exists \Phi \in \mathbb{V}_0^{**}$, melyre $\Phi \notin \operatorname{Ran} J$, ahol $J : \mathbb{V}_0 \xrightarrow{\subset} \mathbb{V}^{**}$ a vektortér természetes beágyazása a biduálisába!

2. Gyakorlat:

Igazoljuk, hogy ha a $\mathbb{V}$ véges dimenziós vektortérben $\{b_i\}_{i=1}^n \subset \mathbb{V}$ bázis, $\{\beta_i\}_{i=1}^n \subset \mathbb{V}^*$ az ehhez tartozó duális bázis, és $\{\tilde{\beta}_i\}_{i=1}^n \subset \mathbb{V}^{**}$ pedig a duális bázishoz tartozó duális bázis, akkor $\tilde{\beta}_i = J(b_i)$, ahol $J : \mathbb{V}_0 \xrightarrow{\subset} \mathbb{V}^{**}$ a vektortér természetes beágyazása a biduálisába!

3. Gyakorlat:

Határozzuk meg az $\mathbb{R}^3$ euklideszi térben az

$$a = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \qquad b = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}, \qquad c = \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}$$

bázis duálisát! Adjuk meg az általános formulát is!

4. Gyakorlat:

Igazoljuk, hogy lineáris leképezés transzponáltjára teljesülnek a következő tulajdonságok!

a) $[A^T]_{i,j} = [A]_{j,i}$ (véges dimenzióban);

b) $(A^T)^T = A$ (véges dimenzióban);

c) $(\alpha A + \beta B)^T = \alpha A^T + \beta B^T$;

d) $(AB)^T = B^T A^T$;

e) $(A^{-1})^T = (A^T)^{-1}$ (ha A invertálható).

5. Gyakorlat:

Igazoljuk, hogy (véges dimenziós) euklideszi tér lineáris leképezéseinek adjungáltjára teljesülnek a következő tulajdonságok!

a) $[A^*]_{i,j} = \overline{[A]_{j,i}}$ (ortonormált bázisban);

b) $(A^*)^* = A$;

c) $(\alpha A + \beta B)^* = \overline{\alpha} A^* + \overline{\beta} B^*$;

d) $(AB)^* = B^* A^*$;

e) $(A^{-1})^* = (A^*)^{-1}$ (ha A invertálható).

6. Gyakorlat:

Igazoljuk, hogy $M_n(\mathbb{C})$-ben a $\langle A, B\rangle := \mathrm{Tr}(A^*B)$ belső szorzást definiál! (Hilbert–Schmidt belső szorzás.) Határozzuk meg a $\mathbb{C}I$ altér ortogonális komplenterét!

7. Gyakorlat:

Legyen $A \in M_n(\mathbb{C})$ adott mátrix. Határozzuk meg az A-val való balról szorzás,

$$L_A : M_n(\mathbb{C}) \to M_n(\mathbb{C}), \qquad B \mapsto AB$$

leképezés adjungáltját a Hilbert–Schmidt belső szorzásra nézve!

8. Gyakorlat:

Igazoljuk, hogy egy euklideszi térben az *ortogonális projekció* következő két definíciója ekvivalens!

- **Geometriai definíció:** Egy lineáris leképezés *ortogonális projekció*, ha magtere és képtere ortogonális kiegészítő alterek, és a leképezés képterén az identitás.
- **Algebrai definíció:** Egy P lineáris leképezés *ortogonális projekció*, ha önadjungált ($P^* = P$) és idempotens ($P^2 = P$).

1.4. Tenzorszorzat

1. Gyakorlat:

Legyen U, V vektortér, $j : U \otimes V \to \mathrm{Lin}(V^*, U)$ pedig az a lineáris leképezés, melyre $u \otimes v \in U \otimes V$ és $\phi \in V^*$ esetén $\big(j(u \otimes v)\big)(\phi) = \phi(v)u$. Igazoljuk, hogy j injektív, és pontosan akkor szürjektív, ha $\dim U < \infty$ vagy $\dim V < \infty$!

Milyen hasonló kapcsolat állapítható meg $U \otimes V^*$ és $\mathrm{Lin}(V, U)$ között?

2. Gyakorlat:

Legyen $\big(\mathbb{U}, \langle\cdot,\cdot\rangle_{\mathbb{U}}\big)$ és $\big(\mathbb{V}, \langle\cdot,\cdot\rangle_{\mathbb{V}}\big)$ két (véges dimenziós, komplex) euklideszi tér. Igazoljuk, hogy ekkor az $\mathbb{U}\otimes\mathbb{V}$ tenzorszoztat-téren euklideszi struktúrát definiál az

$$\langle u_1 \otimes v_1, u_2 \otimes v_2\rangle_{\mathbb{U}\otimes\mathbb{V}} := \langle u_1, u_2\rangle_{\mathbb{U}} \cdot \langle v_1, v_2\rangle_{\mathbb{V}}$$

összefüggés, ha első változójában konjugált lineárisan, másodikban lineárisan kiterjesztjük.

3. Gyakorlat:

Legyen $V = \mathbb{R}^3$, és $a := \left(\begin{smallmatrix}1\\1\\0\end{smallmatrix}\right) \otimes \left(\begin{smallmatrix}0\\0\\1\end{smallmatrix}\right) - \left(\begin{smallmatrix}0\\0\\1\end{smallmatrix}\right) \otimes \left(\begin{smallmatrix}1\\1\\0\end{smallmatrix}\right)$. Egészítse ki az $\{a\}$ halmazt $V \wedge V$ egy bázisává.

4. Gyakorlat:

Írjuk fel az $A : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2$ lineáris operátor esetén az $A \vee A$ és $A \wedge A$ leképezést (alkalmas bázisban), ha A mátrixa $\mathbb{C}^2$ kanonikus bázisában $\left(\begin{smallmatrix}1&2\\3&4\end{smallmatrix}\right)$.

5. Gyakorlat:

Legyen a V véges, n dimenziós vektortérben $\{e_i\}_{i=1}^n$ bázis! Igazoljuk, hogy $V^{\wedge k}$-ban

$$\{e_{i_1} \wedge e_{i_2} \wedge e_{i_3} \wedge \cdots \wedge e_{i_k} \mid 1 \le i_1 < i_2 < i_3 < \cdots < i_k \le n\}$$

bázis, és $\dim V^{\wedge k} = \binom{n}{k}$!

6. Gyakorlat:

Legyen a V véges, n dimenziós vektortérben $\{e_i\}_{i=1}^n$ bázis! Igazoljuk, hogy $V^{\vee k}$-ban

$$\{e_{i_1} \vee e_{i_2} \vee e_{i_3} \vee \cdots \vee e_{i_k} \mid 1 \le i_1 \le i_2 \le i_3 \le \cdots \le i_k \le n\}$$

bázis, és $\dim V^{\vee k} = \binom{n+k-1}{k}$!

7. Gyakorlat:

Legyen L vektortér.

(a) Bizonyítsuk be, hogy ekkor $\otimes^2 L = \wedge^2 L \oplus \vee^2 L$!

(b) Igaz-e, hogy $\otimes^3 L = \wedge^3 L \oplus \vee^3 L$?

8. Gyakorlat:

Legyen $e_1, \ldots, e_n$ ortonormált bázis egy véges dimenziós $(V, <.,.>)$ euklideszi térben. Számoljuk ki az $e_1 \wedge \cdots \wedge e_k$ és $e_1 \vee \cdots \vee e_k$ vektorok normáját.

9. Gyakorlat:

Legyen a $\mathbb{V}$ vektortér n-dimenziós euklideszi tér! Közvetlenül, ortonormált bázissal végzett számolással igazojuk, hogy $n = 2, 3$ és $k = 2, 3$ esetén $\mathbb{V}^{\otimes k}$-ben a $\vee^k\mathbb{V}$ és a $\wedge^k\mathbb{V}$ alterek ortogonálisak! Ezután igazoljuk az állítást minden (szóba jöhető) n, k párra!

10. Gyakorlat:

Legyen $A \in \mathrm{Lin}(\mathbb{U})$ és $B \in \mathrm{Lin}(\mathbb{V})$ két diagonalizálható lineáris leképezés, melyek sajátértékei, sajátvektorai:

$$Au_i = \alpha_i u_i \quad (i = 1 \dots n = \mathrm{Dim}\,\mathbb{U}), \quad Bv_j = \beta_j v_j \quad (j = 1 \dots m = \mathrm{Dim}\,\mathbb{V}).$$

Határozzuk meg $A \otimes B$ sajátértékeit, sajátvektorait!

11. Gyakorlat:

Igazoljuk, hogy, hogy $u_1 \otimes v_1 + u_2 \otimes v_2$ pontosan akkor elemi tenzor, ha vagy u_1 és u_2, vagy v_1 és v_2 lineárisan összefüggő!

12. Gyakorlat:

Egy kvantummechanikai rendszer állapotait a pozitív szemidefinit, önadjungált operátorok (sűrűségmátrixok) írják le. Egy ρ állapotban levő rendszer *von Neumann entrópiája* $S(\rho) = -\mathrm{Tr}(\rho \ln \rho) = -\sum_{i=1}^n \lambda_i \ln \lambda_i$, ahol $\{\lambda_i\}_{i=1}^n \subset \mathbb{R}$ a ρ operátor sajátértékei.

Legyen A és B két (véges dimenziós) rendszer, melyek rendre a ρ_A illetve ρ_B állapotban vannak. Ha a két rendszer között nincs korreláció, akkor az A és B rendszer együttes állapotát a $\rho_A \otimes \rho_B$ sűrűségmátrix írja le. Igazoljuk, hogy az entrópia additív, azaz

$$S(\rho_A \otimes \rho_B) = S(\rho_A) + S(\rho_B).$$

13. Gyakorlat:

A következő mátrixok közül melyek írhatók föl elemi tenzorszorzatként? Hogyan?

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & i \\ i & 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & i \\ i & -1 \end{bmatrix}$$

2. Normált terek, Banach-terek

2.1. Norma axiómái

1. Gyakorlat:

Bizonyítsuk be, hogy ha $(X, \|.\|_X)$ és $(Y, \|.\|_Y)$ normált tér, akkor $B(X, Y)$

(az $X \to Y$ korlátos lineáris operátorok) is normált tér az operátor normával! Továbbá igazoljuk, hogy ha Y Banach-tér, akkor $B(X, Y)$ is Banach-tér!

2. Gyakorlat:

Legyen p_1 és p_2 norma az X téren. Bizonyítsuk be, hogy ekkor $p_1 + p_2$ és $\max(p_1, p_2)$ is norma!

3. Gyakorlat:

Igazoljuk, hogy normált tér egységgömbje (és így bármely középpontú és sugarú gömbje is) konvex halmaz!

4. Gyakorlat:

(a) Vázoljuk $\mathbb{R}^2$-en a különböző p-normák egységgömbjeit, vagyis a $B_p := \{x \in \mathbb{R}^2 : |x_1|^p + |x_2|^p \leq 1\}$ halmazokat, ahol $1 \leq p \leq \infty$!

(b) Definiáljuk B_p-t a fenti módon $0 < p < 1$ esetén is! Konvexek lesznek-e ezek a halmazok?

(c) Normát határoz-e meg $\mathbb{R}^2$-en $\|x\| := (|x_1|^p + |x_2|^p)^{1/p}$, ha $0 < p < 1$?

5. Gyakorlat:

Igazoljuk, hogy $1 \leq p \leq q \leq \infty$ esetén $l^p \subset l^q$, valamint ha $x \in l^p$, akkor $\|x\|_p \geq \|x\|_q$!

2.2. Banach-terek

Szükséges ismeretek: Hahn-Banach tétel algebrai alakja (funkcionálok kiterjeszthetősége), egyenletes folytonosság tétele (Banach–Steinhaus), nyílt leképezés tétele (Banach–Schauder), zárt gráf tétele, korlátos inverz tétel.

1. Gyakorlat:

Legyen X Banach-tér, $Y \subset X$, $z \in X$. Pontosan mikor létezik $\phi \in X^*$, melyre $\phi(y) = 0 \ \forall y \in Y$ és $\phi(z) = 1$? Adjuk ekkor éles alsó becslést $\|\phi\|$-re!

2. Gyakorlat:

Legyen E Banach-tér és $F \subset E$ lineáris altér. Igazoljuk, hogy F pontosan akkor sűrű E-ben, ha minden F-en eltűnő korlátos lineáris funkcionál konstans nulla a teljes E téren, azaz

$$\overline{F} = E \quad \Longleftrightarrow \quad \big((f \in E^* \wedge f|_F = 0) \Rightarrow f \equiv 0\big)!$$

3. Gyakorlat:

Mutassuk meg, hogy $(l^\infty)^*$ szigorúan nagyobb, mint l^1, azaz létezik olyan $\Phi : l^\infty \to \mathbb{C}$ korlátos lineáris funkcionál, amely nem írható föl $x = (x_0, x_1, x_2 \dots) \in l^\infty$ esetén $\Phi(x) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \bar{f}_n x_n$ alakban, ahol $f = (f_0, f_1, f_2 \dots) \in l^1$!

4. Gyakorlat:

Igazoljuk, hogy $(C[0,1], \|\cdot\|_\infty)$ szeparábilis Banach-tér!

5. Gyakorlat:

Igazoljuk, hogy ha egy $A \subset X$ halmaz az X Banach-térben *gyengén korlátos*, azaz minden $\phi \in X^*$ esetén $\phi(A)$ korlátos, akkor A korlátos!

6. Gyakorlat:

Igazoljuk, hogy az l^∞ Banach-térben a konvergens sorozatok c halmaza valamint a zéró sorozatok c_0 részhalmaza zárt lineáris altér!

7. Gyakorlat:

Igazoljuk, hogy $1 \le p < \infty$ esetén az l^p tér szeparálható!

8. Gyakorlat:

Legyen X és Y Banach-tér. Mutassuk meg, hogy ha $A \in \mathcal{B}(X, Y)$ nyílt, akkor szürjektív!

2.3. Fréchet- és Gâteaux-derivált

Szükséges ismeretek: Fréchet- és Gâteaux-derivált.

1. Gyakorlat:

Tanultuk, hogy minden lineáris leképezés Fréchet-deriváltja önmaga. Legyen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, és $f(x) = x$! Nyilván f lineáris, ugyanakkor $f'(x) = 1 \neq x$. Oldjuk föl a látszólagos ellentmondást!

2. Gyakorlat:

Legyen

$$\Phi : M_n(\mathbb{C}) \to M_n(\mathbb{C}), \qquad A \mapsto A^3.$$

Határozzuk meg Φ Fréchet-deriváltját minden pontban!

3. Gyakorlat:

Legyen $D \subset M_n(\mathbb{C})$ az invertálható mátrixok halmaza. Igazoljuk, hogy D nyílt halmaz (az operátor norma átal indukált topológiában)! Határozzuk meg a $\Phi : D \to M_n(\mathbb{C})$, $\Phi(A) = A^{-1}$ leképezés Fréchet-deriváltját egy tetszőleges $A \in D$ pontban!

4. Gyakorlat:

A 2. és a 3. gyakorlat eredménye valamint a láncszabály alkalmazásával határozzuk meg az invertálható mátrixok halmazán a minusz harmadik hatványra emelés Fréchet-deriváltját! Ellenőrizzük, hogy mindkét kompozíciósorrendet véve ugyanazt az eredményt kapjuk!

5. Gyakorlat:

Igazoljuk, hogy az $f : M_n(\mathbb{C}) \to M_n(\mathbb{C})$, $f(X) = \sin(X)$ leképezés Fréchet-deriváltja az $I \in M_n(\mathbb{C})$ pontban $f'[I]H = (\cos I)H$! Igaz-e hasonló állítás I-től különböző pontokban?

6. Gyakorlat:

Határozzuk meg $A, H \in M_n(\mathbb{C})$, $[A, H] = 0$ esetén az $f(A) = \sin(A)$ leképezés $df'(A, H)$ Gâteaux-deriváltját!

7. Gyakorlat:

Határozzuk meg $A \in M_n(\mathbb{C})$ esetén az $f(A) = \mathrm{Tr}(\sin(A))$ leképezés $f'[A]$ Fréchet-deriváltját!

8. Gyakorlat:

Legyen X Banach-tér, $A \in B(X)$. Számoljuk ki a $t \mapsto \sin tA$ Fréchet-deriváltját, ahol $t \in \mathbb{R}$!

9. Gyakorlat:

Írjuk át az $\tilde{f}(r, \varphi) = r \sin(3\varphi)$ leképezést síkbeli polár-koordinátákból Descartes-koordinátákba! Határozzuk meg az így kapott $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $(x, y) \mapsto f(x, y)$ leképezés $df\big((0, 0), (h_x, h_y)\big)$ Gâteaux-deriváltját az origóban! Mekkora a $h_\varphi = (\cos\varphi, \sin\varphi)$ irányú Gâteaux-derivált? (Erre közvetlenül is válaszolhatunk az $\tilde{f}$ polárkoordinátás alakból.) Lineáris-e a Gâteaux-derivált **h**-ban? Létezik-e f-nek a Fréchet-deriváltja az origóban?

2.4. Funkcionálok és operátorok

Szükséges ismeretek: funkcionál, operátor normája, $l^p - l^q$, $L^p - L^q$ dualitás.

1. Gyakorlat:

Határozzuk meg az

$$\Phi : l^p_{\mathbb{C}} \to \mathbb{C}, \qquad x = (x_0, x_1, x_2 \dots) \mapsto \Phi(x) = x_1 - 4x_2 + 9ix_6$$

funkcionál normáját $p = 1, 2, 3$ és ∞ esetén!

2. Gyakorlat:

Legyen

$$\psi : l^p \to \mathbb{C}, \qquad (a_k)_{k\in\mathbb{N}} \mapsto \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_k}{3^k}$$

funkcionál! Igazoljuk, hogy a funkcionál folytonos, és számoljuk ki $\|\psi\|$ értékét $1 \le p \le \infty$ esetén!

3. Gyakorlat:

Milyen $\alpha > 0$ valós szám esetén definiál a

$$\Phi_\alpha : l^3 \to \mathbb{C}, \qquad a = (a_1, a_2, a_3 \dots) \mapsto \Phi_\alpha(a) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k}{k^\alpha}$$

leképezés korlátos lineáris funkcionált?

4. Gyakorlat:

Legyen $g \in C[0,1]$, és M_g jelölje a „g-vel való szorzás" operátorát, tehát $M_g : f \mapsto gf$. Határozzuk meg M_g normáját, ha $f \in C[0,1]$, valamint ha $f \in L^p[0,1]$ $(1 \le p \le \infty)$!

5. Gyakorlat:

Folytonosak-e az alábbi leképezések? Ha igen, határozzuk meg normájukat!

(a) $\quad A : C^2[0,1] \to C[0,1], \qquad f \mapsto f;$

(b) $\quad B : C^1[0,1] \to C[0,1], \qquad f \mapsto f';$

(c) $\quad C : C^2[0,1] \to C[0,1], \qquad f \mapsto f'';$

(d) $\quad D : C[0,1] \rightarrowtail C[0,1], \quad \operatorname{Dom} A = C[0,1] \cap C^1[0,1], \quad f \mapsto f'.$

Az itt szereplő folytonos, folytonosan deriválható és kétszer folytonosan deriválható függvények terén a normát a következőképpen értelmezzük:

$$f \in C[0,1] \text{ esetén} \quad ||f|| = \sup_{x\in[0,1]} \{|f(x)|\},$$

$$f \in C^1[0,1] \text{ esetén} \quad ||f|| = \sup_{x\in[0,1]} \{|f(x)|\} + \sup_{x\in[0,1]} \{|f'(x)|\},$$

$$f \in C^2[0,1] \text{ esetén} \quad ||f|| = \sup_{x\in[0,1]} \{|f(x)|\} + \sup_{x\in[0,1]} \{|f'(x)|\} + \sup_{x\in[0,1]} \{|f''(x)|.$$

6. Gyakorlat:

Mennyi az $Af(x) = \int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t$ képlettel definiált A operátor normája a $C[0,1]$ és az $L^1[0,1]$ téren?

3. Hilbert-terek és korlátos operátoraik

3.1. A Hilbert-tér geometriája

1. Gyakorlat:
Igazoljuk, hogy $1 \leq p \leq \infty$, $p \neq 2$ esetén az l^p és $L^p(X, \mu)$ Banach-terekben, valamint a $C[a, b]$ Banach-térben nem teljesül a paralelogramma egyenlőség!

2. Gyakorlat:
Igazoljuk, hogy ha egy Banach-térben teljesül a paralelogramma egyenlőség, akkor a norma származtatható belső szorzásból!

3. Gyakorlat:
Igazoljuk, hogy minden H_0 elő-Hilbert-tér izomorfizmus erejéig egyértelműen teljessé tehető, a következő értelemben.

(a) Létezik egy $\mathcal{H}$ Hilbert-tér és egy $j : \mathcal{H}_0 \overset{\subset}{\to} \mathcal{H}$ injektív, belsőszorzat-tartó lineáris beágyazás, melyre $j(\mathcal{H}_0)$ sűrű $\mathcal{H}$-ban!

(b) Ha $(\mathcal{H}, j)$ és $(\mathcal{H}', j')$ is rendelkezik az előző pontban szereplő tulajdonságokkal, akkor egyértelműen létezik egy $b : \mathcal{H} \to \mathcal{H}'$ izomorfizmus (unitér operátor), melyre $b \circ j = j'$ és $b^{-1} \circ j' = j$!

4. Gyakorlat:
Milyen $a, b, c \in \mathbb{C}$ értékek esetén minimális az

$$\int_0^1 |x^3 - a - bx - cx^2|^2 \, dx$$

integrál?

5. Gyakorlat:
Igazoljuk, hogy az $n \times n$ méretű komplex mátrixok $M_n(\mathbb{C})$ vektortere az $\langle A, B \rangle = \mathrm{Tr}(A^* B)$ (Hilbert–Schmidt) belső szorzással Hilbert-tér!

3.2. Adjungált

1. Gyakorlat:
Igazoljuk, hogy a Hilbert-terek korlátos operátorain definiált adjungált-fogalom összhangban van a korábban mátrixokon értelmezett adjungálttal,

azaz ha $A \in \mathcal{B}(\mathbb{C}^n)$, akkor $(A^*)_{i,j} = \overline{(A_{j,i})}$, ahol $X_{i,j}$ az X operátor mátrixa a $\mathbb{C}^n$ standard bázisában!

2. Gyakorlat:

Legyen $A, B, C \in M_n(\mathbb{C})$. Határozzuk meg a következő operátorok adjungáltját!

$$\begin{aligned} L_A &: M_n(\mathbb{C}) \to M_n(\mathbb{C}), & X &\mapsto AX, \\ \Phi_{B,C} &: M_n(\mathbb{C}) \to M_n(\mathbb{C}), & X &\mapsto BXC. \end{aligned}$$

(Az $M_n(\mathbb{C})$ téren a Hilbert–Schmidt féle belső szorzást tekintjük.) Mikor unitér, önadjungált, normális illetve projekció az L_A illetve a $\Phi_{B,C}$ operátor?

3. Gyakorlat:

Adjuk meg a következő l^2 téren definiált operátorok adjungáltját!

$$\begin{aligned} P_n &: (x_0, x_1, x_2 \dots) \mapsto (x_0, x_1 \dots x_n, 0, 0 \dots), \\ M_a &: (x_0, x_1, x_2 \dots) \mapsto (a_0 x_0, a_1 x_1, a_2 x_2 \dots), \qquad (\forall n \in \mathbb{N} \quad a_n \in \mathbb{C}), \\ R &: (x_0, x_1, x_2 \dots) \mapsto (0, x_0, x_1, x_2 \dots), \\ L &: (x_0, x_1, x_2 \dots) \mapsto (x_1, x_2, x_3 \dots), \\ A_a &: (x_0, x_1, x_2 \dots) \mapsto (0, a_0 x_0, a_1 x_1, a_2 x_2 \dots), \qquad (\forall n \in \mathbb{N} \quad a_n \in \mathbb{C}). \end{aligned}$$

4. Gyakorlat:

Adjuk meg a következő $L^2[0,1]$ téren értelmezett operátorok adjungáltját!

$$\begin{aligned} (Ax)(t) &= \int_0^t x(\tau) d\tau, & (Bx)(t) &= t x(t), \\ (Cx)(t) &= x(\sqrt{t}), & (Dx)(t) &= \int_0^t \tau x(\tau) d\tau, \\ (Ex)(t) &= \int_0^{\sqrt{t}} \tau x(\tau) d\tau, & (Fx)(t) &= \int_0^{t^2} \tau x(\tau) d\tau. \end{aligned}$$

5. Gyakorlat:

Igazoljuk, hogy P pontosan akkor ortogonális projekció, ha $P = P^* P$ teljesül!

6. Gyakorlat:

Igazoljuk, hogy ha P és Q ortogonális projekció, akkor

$$\begin{aligned} &a) \qquad P + Q \text{ ortogonális projekció} \quad \Longleftrightarrow \quad PQ = 0, \\ &b) \qquad PQ \text{ ortogonális projekció} \quad \Longleftrightarrow \quad PQ = QP. \end{aligned}$$

7. Gyakorlat:
Legyen $A \in B(\mathcal{H})$. Bizonyítsuk be, hogy ha $A - iI$ invertálható, és

$$(A + iI)(A - iI)^{-1}$$

unitér, akkor A önadjungált!

8. Gyakorlat:
Igazoljuk, hogy ha A egy Hilbert-tér korlátos operátora, akkor

$$\operatorname{Ker} A = (\operatorname{Ran} A^*)^{\perp}.$$

3.3. Ortogonális polinomrendszerek

1. Gyakorlat:
Legyen

$$H_n(x) = (-1)^n e^{x^2} \frac{d^n}{dx^n} e^{-x^2} \qquad (\textbf{Rodriguez-formula})$$

az n-edik Hermite-polinom. Bizonyítsuk be, hogy

a) a H_n polinomok az $L_2(\mu)$ tér bázisát alkotják, ahol μ a Gauss-mérték, azaz sűrűségfüggvénye $\rho(x) = e^{-x^2}$;

b) Igazoljuk, hogy H_n főegyütthatója 2^n.

c) Igazoljuk a következő összefüggéseket:

$$\begin{aligned} H_n' &= 2xH_n - H_{n+1}, \\ H_{n+1}(x) &= 2xH_n(x) - 2nH_{n-1}(x), && (\textbf{rekurziós összefüggés}) \\ H_n'(x) &= 2nH_{n-1}, \\ 0 &= H_n''(x) - 2xH_n'(x) + 2nH_n(x). && (\textbf{differenciálegyenlet}) \end{aligned}$$

d) Igazoljuk, hogy a Hermite-polinomok **generátorfüggvénye** $e^{t(2x-t)}$, azaz

$$\exp(2xt - t^2) = \sum_{n=0}^{\infty} H_n(x) \frac{t^n}{n!}.$$

e) Igazoljuk,hogy

$$||H_n(x)||^2 = \sqrt{\pi} 2^n n!.$$

2. Gyakorlat:
Az Hermite-polinomok generátorfüggvényének segítségével bizonyítsuk be, hogy a Fourier-transzformáció sajátfüggvényei az Hermite-függvények!

3.4. Topológiák

1. Gyakorlat:

Mutassuk meg, hogy az $S_1 = \{x \in l^2 \mid ||x|| = 1\} \subset l^2$ egységgömb lezártja $B_1 = \{x \in l^2 \mid ||x|| \leq 1\} \subset l^2$, azaz

(a) Igazoljuk, hogy $x_n \xrightarrow{w} x$ és $||x_n|| \leq c$ esetén $||x|| \leq c$!

(b) Tetszőleges $y \in B_1$ vektor esetén adjunk meg egy olyan $\{x_n\} \subset S_1$ sorozatot, mely gyengén konvergál y-hoz!

2. Gyakorlat:

Legyen $\mathcal{H}$ szeparábilis Hilbert-tér, és $\{e_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{H}$ ortonormált bázis. Igazoljuk, hogy ekkor $x, y \in \mathcal{H}$ esetén

$$d(x, y) = \sum_{n\in\mathbb{N}} 2^{-n} |\langle x - y, e_n\rangle|$$

metrika a $\mathcal{H}$ téren, és ha $x_n \xrightarrow{w} x$, akkor $d(x_n, x) \xrightarrow{n\to\infty} 0$.

3. Gyakorlat:

Legyen M a $\mathcal{H}$ Hilbert-tér egy olyan részhalmaza, melynek lineáris burka sűrű $\mathcal{H}$-ban! Igazoljuk, hogy ha $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{H}$ korlátos sorozat, és $\exists x \in \mathcal{H}$, melyre $\forall y \in M$ esetén $\langle x_n, y\rangle \xrightarrow{n\to\infty} \langle x, y\rangle$, akkor $x_n \xrightarrow{w} x$!

4. Gyakorlat:

Konvergensek-e az l^2 téren a norma-, illetve a gyenge topológiában a következő sorozatok? Ha igen, adjuk meg a határértéküket is!

$$x_n = \frac{1}{\sqrt{n+1}}\delta_n, \qquad y_n = \sum_{k=2^n}^{2^{n+1}-1} \delta_k, \qquad z_n = \frac{1}{\sqrt{2^n}} y_n, \qquad w_n = \frac{1}{2^n} y_n$$

5. Gyakorlat:

Legyen $\mathcal{H}$ Hilbert-tér, $A_n, A \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$! Igaz-e, hogy

(a) ha $A_n \to A$, akkor $||A_n|| \to ||A||$? (Igaz.)

(b) ha $A_n \to A$, akkor $\{||A_n||\}$ korlátos? (Igaz.)

(c) ha $A_n \xrightarrow{so} A$, akkor $||A_n|| \to ||A||$? (Hamis.)

(d) ha $A_n \xrightarrow{so} A$, akkor $\{||A_n||\}$ korlátos? (Igaz.)

(e) ha $A_n \xrightarrow{wo} A$, akkor $||A_n|| \to ||A||$? (Hamis.)

(f) ha $A_n \xrightarrow{wo} A$, akkor $\{||A_n||\}$ korlátos? (Igaz.)

Az állításokat bizonyítsuk!

6. Gyakorlat:

Legyen $\mathcal{H}$ szeparábilis Hilbert-tér, és $\{e_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{H}$ ortonormált bázis. Igazoljuk, hogy ekkor $A, B \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ esetén

$$d(A,B) = \sum_{n,m\in\mathbb{N}} 2^{-(n+m)} |\langle e_n, (A-B)e_m\rangle|$$

metrika a $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ téren, és ha $A_n \xrightarrow{wo} A$ akkor $d(A_n, A) \xrightarrow{n\to\infty} 0$.

7. Gyakorlat:

Adjunk meg egy d metrikát a $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ halmazon úgy, hogy tetszőleges $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{B}(\mathcal{H})$ sorozat esetén

$$A_n \xrightarrow{so} A \quad \Longleftrightarrow \quad d(A_n, A) \xrightarrow{n\to\infty} 0 \text{ és } \sup_{n\in\mathbb{N}}\{||A_n||\} < \infty.$$

8. Gyakorlat:

Melyik operátor-topológiában létezik, és mi a határértéke a következő operátor-sorozatoknak?

$$A_n : l^2 \to l^2, \quad A_n(x_0, x_1, x_2 \dots) = (\underbrace{0, 0 \dots 0}_{n \text{ darab}}, (-1)^n x_n, (-1)^{n+1} x_{n+1}, \dots);$$

$$B_n : l^2 \to l^2, \quad B_n(x_0, x_1, x_2 \dots) = (x_0, x_n, x_{2n}, x_{3n} \dots);$$

9. Gyakorlat:

Az $A \in \mathcal{B}(l^2)$ operátort definiálja az

$$A\delta_n = \delta_{2n}, \qquad \forall n \in \mathbb{N}$$

egyenlőség! Mennyi az A operátor normája? Milyen operátor-topológiában konvergens, és hova tart az $\{A^n\}_{n\in\mathbb{N}}$ operátor-sorozat?

10. Gyakorlat:

Igazoljuk, hogy ha P és Q tetszőleges ortogonális projekció, akkor $(PQ)^n$ konvergens az erős operátor-topológiában! Mi a sorozat határértéke?

11. Gyakorlat:
Igaz-e, hogy ha $A_n \xrightarrow{so} A$ és $B_n \xrightarrow{so} B$, akkor $A_nB_n \xrightarrow{so} AB$?

12. Gyakorlat:
Igazoljuk, hogy egy Hilbrt-tér unitér operétorai az erős operátor-topológiában folytonos topologikus csoportot alkotnak, azaz ha U_n, V_n, U, V unitér operátorok, $U_n \xrightarrow{so} U$ és $V_n \xrightarrow{so} V$ akkor $U_nV_n \xrightarrow{so} UV$ és $U_n^{-1} \xrightarrow{so} U^{-1}$!

3.5. Kompakt operátorok

1. Gyakorlat:
Igaz-e, hogy a kompakt operátorok halmaza az erős operátor-topológiában zárt?

2. Gyakorlat:
Milyen $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{C}$ sorozatra kompakt az

$$A : l^2 \to l^2, \qquad A(x_0, x_1, x_2 \dots) = (a_0x_0, a_1x_1, a_2x_2 \dots)$$

operátor?

3. Gyakorlat:
Bizonyítsuk be, hogy végtelen dimenziós Hilbert-tér kompakt operátorának nincs korlátos inverze!

3.6. Spektrum, spektráltétel

1. Gyakorlat:
Legyen A és B két invertálható mátrix. Igazoljuk, hogy AB és BA spektruma azonos!

2. Gyakorlat:
Legyen $T \in B(l^2)$,

$$T(x_1, x_2, x_3, x_4, \dots) = \left(x_1, \frac{1}{2}x_2, \frac{1}{3}x_3, \frac{1}{4}x_4, \dots\right).$$

Határozzuk meg T spektrumát!

3. Gyakorlat:
Az l^2 tér T operátorát a

$$T(x_1, x_2, x_3, x_4, \dots) = \left(\frac{1}{2}x_2, \frac{1}{3}x_3, \frac{1}{4}x_4, \dots\right)$$

képlettel definiáljuk.

a) Adjuk meg T normáját!

b) Adjuk meg T pontspektrumát és sajátvektorait!

c) Adjuk meg T adjungáltját!

d) Adjuk meg T^* pontspektrumát és rezolvens halmazát!

4. Gyakorlat:
Adjuk meg az $A : L^2[0,1] \to L^2[0,1]$,

$$(Af)(x) := \frac{f(x)}{2-x}$$

operátor spektrumát!

5. Gyakorlat:
Határozzuk meg az l^2 téren értelmezett balra és jobbratolás operátor spektrumát és annak részeit!

6. Gyakorlat:
Igazoljuk az első rezolvens-formulát:

$$R_\lambda(T) - R_\mu(T) = (\mu - \lambda)R_\mu(T)R_\lambda(T).$$

Itt T egy Hilbert-tér korlátos operátora, és $\lambda, \mu \in \rho(T)$.

7. Gyakorlat:
Igazoljuk a második rezolvens-formulát:

$$R_\lambda(A) - R_\lambda(B) = R_\lambda(A)(A-B)R_\lambda(B).$$

Itt A, B egy Hilbert-tér két korlátos operátora, és $\lambda \in \rho(A) \cap \rho(B)$.

8. Gyakorlat:
Legyen A önadjungált operátor egy $\mathcal{H}$ Hilbert téren, és $z = a + ib$, $b \neq 0$. Igazoljuk, hogy ekkor az

$$(A + zI)(A + \overline{z}I)^{-1}$$

operátor unitér!

9. Gyakorlat:
Legyenek $\{P_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ páronként egymásra ortogonális projekciók, és $\{\lambda_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{C}$ tetszőleges konstansok.

a) Milyen $\{\lambda_n\}$ sorozat esetén konvergens a $\sum_{n=0}^{\infty} \lambda_n P_n$ sor az erős operátor-topológiában illetve az operátornomra topológiában?

b) A $\sum_{n=0}^{\infty} \lambda_n P_n$ operátor milyen $\{\lambda_n\}$ sorozat esetén normális, önadjungált, projekció, illetve unitér?

c) Határozzuk meg a $\sum_{n=0}^{\infty} \lambda_n P_n$ operátor normáját, adjungáltját, spektrumát és annak részeit.

10. Gyakorlat:
Határozzuk meg az $L^2[-1,1]$ téren értelmezett

$$(Af)(x) = 2f(x) - f(-x) \qquad (f \in l^2[-1,1], x \in [-1,1])$$

operátor spektrálfelbontását, valamint az e^A operátort!

11. Gyakorlat:
Adjuk meg az $M : L^2[0,1] \to L^2[0,1]$,

$$(Mf)(x) := [2x]xf(x)$$

operátor pont-, folytonos és reziduális spektrumát!

12. Gyakorlat:
Ha $H \subset [0,1]$ egy Borel-halmaz, akkor legyen

$$\mu(H) := \begin{cases} \frac{2}{3}\lambda(H), & \text{ha } \frac{1}{4} \notin H, \\ \frac{2}{3}\lambda(H) + \frac{1}{3}, & \text{ha } \frac{1}{4} \in H, \end{cases}$$

ahol λ a Lebesgue-mérték. Mi az $L^2(\mu)$ térben az x^2 függvénnyel való szorzás operátorának spektruma?

4. Nemkorlátos operátorok

Ebben a fejezetben a „lineáris operátor” fogalmához nem társítjuk sem azt, hogy a leképezés mindenütt értelmezve van, sem a korlátosságot.

1. Gyakorlat:
Igazoljuk, hogy az A lineáris operátor pontosan akkor lezárható, ha $(0,h) \in \overline{\Gamma(A)}$ esetén $h = 0$!

2. Gyakorlat:

Legyen a T lineáris operátor értelmezési tartománya és hatása:

$$D(T) = \{f \in L^2[0,1] \mid f \in C^1[0,1]\}, \qquad Tf = f'.$$

Igazoljuk, hogy T nem korlátos operátor!

3. Gyakorlat:

Igazoljuk, hogy a következő lineáris operátorok szimmetrikusak!

$$\begin{array}{lll} a) & D(A) = \{f \in L^2[0,1] \mid f \in C^1[0,1],\ f(0) = f(1) = 0\}, & Af = if'; \\ b) & D(B) = \{f \in L^2[0,1] \mid f \in C^2[0,1],\ f(0) = f(1) = 0\}, & Bf = f''; \\ c) & D(C) = \{f \in L^2[0,1] \mid f \in C^2[0,1],\ f'(0) = f'(1) = 0\}, & Cf = f''. \end{array}$$

4. Gyakorlat:

Legyen Q a

$$D(Q) = \left\{ f \in L^2(\mathbb{R}) \;\middle|\; \int_{\mathbb{R}} |xf(x)|^2 dx < \infty \right\} \subset L^2(\mathbb{R})$$

értelmezési tartományon az x változóval való szorzás operátora:

$$(Qf)(x) = xf(x) \qquad \forall f \in D(Q),\ x \in \mathbb{R}.$$

Igazoljuk, hogy Q önadjungált!

5. Gyakorlat:

Legyen $f : \mathbb{N} \to \mathbb{C}$ tetszőleges függvény, és ennek segítségével definiáljuk az M_f „szorzás operátort” a következőképpen:

$$D(M_f) = \left\{ x \in l^2(\mathbb{N}) \;\middle|\; \sum_{n\in\mathbb{N}} |f(n)|^2 |x_n|^2 < \infty \right\}, \qquad M_f(x) = \sum_{n\in\mathbb{N}} f(n) x_n \delta_n.$$

Igazoljuk, hogy M_f zárt operátor!

6. Gyakorlat:

Igazoljuk, hogy ha Z zárt operátor, B pedig az egész Hilbert-téren értelmezett korlátos operátor, akkor ZB zárt operátor!

7. Gyakorlat:

Legyen a T operátor a

$$D(T) = \left\{ x \in l^2(\mathbb{N}) \;\middle|\; \sum_{n\in\mathbb{N}} n|x_n|^2 < \infty \right\} \subset l^2(\mathbb{N})$$

altéren a

$$T(x) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \sqrt{n+1}x_{n+1}\delta_n$$

formulával értelmezve! Jelölje továbbá tetszőleges $z \in \mathbb{C}$ esetén

$$e(z) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{z^n}{\sqrt{n!}}\delta_n$$

a z-hez tartozó *exponenciális vektort*!

a) Igazoljuk, hogy $x \in D(T)$ esetén a T operátor definíciójának jobb oldalán szereplő sor konvergens (sőt, feltétel nélkül konvergens), tehát a definíció korrekt!

b) Igazoljuk, hogy T zárt operátor!

c) Igazoljuk, hogy $e(z) \in l^2(\mathbb{N})$, és határozzuk meg $e(z)$ normáját!

d) Igazoljuk, hogy tetszőleges $z \in \mathbb{C}$ esetén $Te(z) = e(z)$, tehát $\sigma(T) = \sigma_p(T) = \mathbb{C}$!

5. Kvantummechanikai kitekintés