Funkcionálanalízis
Beadandó házi feladatok

2019. tavasz

1. Házi feladat
Beadási határidő: 2019. március 8. (péntek), előadás

1. Határozza meg az
$$A = \begin{bmatrix} 1 & -\mathrm{i} \\ \mathrm{i} & 1 \end{bmatrix}$$
mátrix spektrálfelbontását, és adja meg az e^A mátrixot! (3p+2p)

2. Legyen $\big(\mathbb{V}, \langle\cdot,\cdot\rangle\big)$ háromdimenziós valós euklideszi tér és $\{x, y, z\} \subset \mathbb{V}$ ortonormált bázis.

   (a) Hány dimenziós a $\wedge^3\mathbb{V}$ és $\vee^3\mathbb{V}$ alterek által generált altér ortogonális kiegészítője $\mathbb{V}^{\otimes 3}$-ban?

   (b) Adja meg az $\{x, y, z\}$ bázis segítségével $\mathbb{V}^{\otimes 3}$ egy olyan nem nulla elemét, ami ortogonális a $\wedge^3\mathbb{V}$ és $\vee^3\mathbb{V}$ alterekre! (Az ortogonalitást igazolja!)

   (1p+4p)

3. Igazolja, hogy a komplex számsorozatok $\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ halmazán a
$$d : \mathbb{C}^{\mathbb{N}} \times \mathbb{C}^{\mathbb{N}} \to \mathbb{R}, \qquad (x, y) \mapsto d(x, y) = \sum_{k=0}^{\infty} 2^{-k} \frac{|y_k - x_k|}{1 + |y_k - x_k|}$$
függvény távolságot határoz meg! (5p)

2. Házi feladat
Beadási határidő: 2019. április 12. (péntek), előadás

1. Igazolja, hogy ha egy $\big(X, \|\cdot\|\big)$ normált térben minden abszolút konvergens sor konvergens, akkor X teljes!

   (Előadáson igazoltuk/igazolni fogjuk az állítás megfordítását, mely szerint Banach-térben minden abszolút konvergens sor konvergens. A $\sum_{n\in\mathbb{N}} x_n$ sor *abszolút konvergens*, ha $\sum_{n\in\mathbb{N}}\|x_n\| < \infty$.) (5p)

2. Igazolja, hogy az $[a, b] \subset \mathbb{R}$ korlátos zárt intervallumon folytonosan differenciálható (komplex értékű) függvények $C^1[a, b]$ halmazán a

$$\|f\| = \left(\int_a^b |f(x)|^2 \,\mathrm{d}x + \int_a^b |f'(x)|^2 \,\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{2}}$$

   kifejezés belső szorzás által indukált normát határoz meg! (Adja meg a belső szorzást, és igazolja, hogy valóban kielégíti a szükséges feltételeket.) (5p)

3. Igazoja, hogy a

$$\Phi : L^3[0, 2] \to \mathbb{C}, \qquad f \mapsto \Phi(f) = \int_0^1 \mathrm{e}^x f(x) \,\mathrm{d}x$$

   leképezés korlátos lineáris funkcionál, és határozza meg Φ normáját! (5p)

3. Házi feladat
Beadási határidő: 2019. május 3., előadás

1. Legyen $||\cdot||_1$ és $||\cdot||_2$ két különböző norma az X vektortéren, amelyekre nézve X teljes. Igazolja, hogy ha bármely $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset X$ sorozatra $\lim_{n\to\infty} ||x_n||_1 = 0$ esetén $\lim_{n\to\infty} ||x_n||_2 = 0$ is teljesül, akkor a két norma ekvivalens!

   (Definíció szerint a két norma *ekvivalens*, ha $\exists k, K \in (0,\infty)$, hogy $\forall x \in X$ esetén $k||x||_1 \leq ||x||_2 \leq K||x||_1$. Az órán bizonyított tételekre szabad hivatkozni.) (5p)

2. A $\mathcal{H} := L^2(\mathbb{R}, \lambda)$ Hilbert-térben megadunk két egyparaméteres operátorcsoportot:

$$(U_s f)(x) := f(x-s) \qquad \text{(eltolás);}$$
$$(V_s f)(x) := \mathrm{e}^{\mathrm{i}sx} f(x) \qquad \text{(síkhullámmal szorzás),}$$

   ahol $f \in \mathcal{H}$, $s \in \mathbb{R}$.

   (a) Igazolja, hogy $\forall s \in \mathbb{R}$ esetén U_s és V_s unitér operátor!

   (b) Igazolja, hogy $\forall t, s \in \mathbb{R}$ esetén

$$U_t U_s = U_{t+s}, \qquad V_t V_s = V_{t+s}\,!$$

   (c) Határozza meg az $[U_t, V_s] = U_t V_s - V_s U_t$ kommutátor értékét!

   (1+1+3=5p)

3. Az $A : l^2 \to l^2$ korlátos lineáris operátort az $A(\delta_n) = 3\delta_n + \delta_{n+1}$ formula definiálja, ahol $\{\delta_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ az l^2 Hilbert-tér standard ortonormált bázisa. Határozza meg A normáját, valamint az $A^*(\delta_4)$ vektort! (5p)

4. Házi feladat
Beadási határidő: 2019. május 16., előadás

1. Legyen A egy Hilbert-tér korlátos, invertálható operátora. Igazolja, hogy
$$\lambda \in \sigma(A) \Longleftrightarrow \frac{1}{\lambda} \in \sigma\big(A^{-1}\big)\ !$$
(5p)

2. Legyen $T = T^*$ olyan önadjungált operátor, melyre $T \neq I$, $T^2 = I$. Igaz-e, hogy $R = (2i - T)^{-1}$ korlátos normális operátor? Adja meg R spektrumát! (5p)

3. Igazolja, hogy végtelen dimenziós Hilbert-térben unitér operátor nem lehet kompakt! (5p)

(Órán tanult tételekre szabad hivatkozni.)