Funkcionálanalízis tárgy vizsgakérdései

Minden vizsgázó négy kisebb kérdést kap több különböző fejezetből. **A vastagon szedett tételeket bizonyítással együtt kell tudni.** Rövidebb bizonyításokat pontosan kell tudni, hosszabbaknak csak a menetét, az alapötletet kell tudni.

1. Lineáris terek

- Lineáris algebra alapjai, lineáris terek, lineáris leképezések, bázis, lineáris leképezés mátrixa.
- Belső szorzás, adjungálás. Önadjungált, unitér, normális mátrixok, projekciók. Lineáris terek direkt összege.
- Sajátérték, sajátvektor. Normális mátrixok spektrál felbontása. Jordan-féle normálalak, Jordan-Chevalley felbontás.
- Duális tér, biduális. Bázishoz tartozó duális rendszer. **Vektortér kanonikus beágyazása a biduális térbe injektív.** Lineáris leképezés transzponáltja.
- Lineáris terek és leképezések tenzorszorzata (többféle definíció, realizáció). Szimmetrikus és antiszimmetrikus tenzorhatványok.
- **Determináns kétféle definíciójának ekvivalenciája.**

2. Normált terek, Banach-terek

- Topológiai alapfogalmak (nyílt, zárt halmaz, környezet, folytonosság, sorozat határértéke, halmaz lezárása.)
- Normált terek, példák. **Hölder és Minkowski-egyenlőtlenségek.**
- Korlátos lineáris funkcionálok és operátorok. Funkcionál és operátor normája. **Lineáris leképezések folytonossága és korlátossága ekvivalens.** $\mathcal{B}(X, Y)$ **teljes, ha** Y **az.** Normált tér (topologikus) duálisa, **ennek teljessége**.
- Banach-terek, példák, **normált tér teljes burka (konstrukció vázlatosan)**.
- **Abszolút konvergens sorok konvergenciája** és átrendezhetősége. Operátorok analitikus függvénye, **Neumann-sor**.
- Hahn–Banach tétel és **következményei**. **Normált tér kanonikus beágyazása a biduálisba.** Reflexivitás, szeparabilitás.
- Nyílt leképezés tétele, egyenletes korlátosság tétele, **korlátos inverz tétel**, **zárt gráf tétel**.
- Dualitási tételek, l^p, L^p terek duálisa. (**l^p esetében bizonyítás vázlat**.)
- Leképezések Fréchet deriváltja. Lánc szabály.

3. Hilbert-terek és korlátos lineáris operátorok

- Hilbert-tér fogalma, **Schwartz-egyenlőtlenség**, **paralelogramma egyenlőtlenség**, **polarizációs azonosság**.
- Ortonormált rendszer, ortonormált bázis. **Bessel-egyenlőtlenség**, **Bessel-egyenlőség**, **Parseval-formula**, **bázis szerinti kifejtés**.
- A Hilbert-tér geometriája, **Riesz-lemma**, **projekciótétel**, **Riesz-féle reprezentációs tétel**.
- Operátor adjungáltja, **az adjungált tulajdonságai**.
- Korlátos operátorok spektruma, a spektrum részei. Spektrálsugár. **A spektrum tulajdonságai. unitér operátorok spektruma**, önadjungált operátorok spektruma. **Kapcsolat operátornak és adjungáltjának spektruma között. Spektrum leképezési tétel polinomokra.**
- Vektor-topológiák Hilbert-téren, példák. **Gyenge és normában vett konvergencia kapcsolata. Gyengén konvergens sorozat korlátos.**
- Operátor-topológiák Hilbert-téren. Példák. **A három operátor-topológia kapcsolata. Erős és gyenge operátor-topológia ekvivalenciája unitéreken.**
- Hilbert-terek kompakt operátorai. **Kompakt operátorok normában zárt kétoldali *-ideált alkotnak.** Kompakt operátor spektruma (Riesz–Schauder tétel). Kompakt operátorok közelítése véges rangúakkal.
- Önadjungált operátorok függvénykalkulusa.
- Fourier-transzformáció értelmezése, tulajdonságai az $L^2(\mathbb{R})$ téren.
- Hilbert-terek, illetve ezek korlátos operátorainak tenzorszorzata. L^2 terek tenzorszorzata.
- Projektormérték, integrálás projektormérték szerint. Önadjungált (normális) operátorok spektrálfelbontása. Normális operátorok függvényei.

4. Nemkorlátos operátorok

- Példák nemkorlátos operátorra. **Hellinger–Toeplitz tétel.**
- Zárt és lezárható operátorok. **Operátor lezárhatóságának kritériuma. Ha $\rho(A) \neq \emptyset$, akkor A zárt.**
- Nemkorlátos operátor adjungáltja. Szimmetrikus és önadjungált operátor. Lényegében önadjungált operátor. **Operátor szimmetrikusságának egyszerű kritériuma.**
- Az adjungált operátor tulajdonságai. **Az adjungált operátor gráfjának előállítása az eredeti operátor gráfjával.**

Tasnádi Tamás
2019. május