Funkcionálanalízis Gyakorlatok

Szerkeszti: Tasnádi Tamás

2015. február 24.

Kivonat

A jegyzetbe többek között Andai Attila, Horváth Miklós, Mosonyi Milán, Petz Dénes, Pitrik József, Réffy Júlia, Ruppert László, Tasnádi Tamás, Weiner Mihály feladatai is bekerülnek.

Tartalomjegyzék

1. Lineáris terek

1.1. Lineáris függetlenség, bázis, speciális mátrixok

1. Gyakorlat:
Alteret alkotnak-e $\mathbb{R}^3$-ben egy egyenes pontjai?

2. Gyakorlat:
Az $n \times n$-es komplex mátrixok $M_n(\mathbb{C})$ vektorterében komplex illetve valós alteret, csoportot, részalgebrát alkotnak-e a következő halmazok:

a) diagonális mátrixok;

b) önadjungált mátrixok;

c) unitér mátrixok;

d) normális mátrixok;

e) pozitív definit mátrixok;

f) egységnyi nyomú mátrixok;

g) felső háromszög mátrixok;

h) adott $A = A^* \in M_n(\mathbb{C})$-vel kommutáló mátrixok halmaza?

A felsorolt halmazok közül melyik konvex?

3. Gyakorlat:
Határozzuk meg az a, b, c, d, e paraméterek értékét úgy, hogy az $O = \frac{1}{7}\begin{pmatrix} 2 & -6 & a \\ -3 & 2 & b \\ c & d & e \end{pmatrix}$ mátrix irányítástartó, (ill. irányításváltó) ortogonális transzformáció legyen! Ezen paraméterértékek mellett mekkora szöggel forgat az O, (ill. irányításváltó esetben a $-O$) mátrix?

4. Gyakorlat:
Legyen $f_t(x) := e^{tx}$. Bizonyítsuk be, hogy $\{f_t : t \in \mathbb{R}\}$ lineárisan független rendszer az $\mathbb{R}$-en értelmezett végtelen sokszor differenciálható valós értékű függvények vektorterében!

5. Gyakorlat:
Adjuk meg az origóra való tükrözés, az x tengelyre való tükrözés és az xy síkra való tükrözés mátrixát $\mathbb{R}^3$ standard bázisában!

1.2. Sajátérték, sajátvektor, spektrálfelbontás, mátrixok függvénye

1. Gyakorlat:

Mik az

$$A = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

mátrix sajátértékei, sajátvektorai? Milyen leképezést ad meg ez a mátrix?

2. Gyakorlat:

Határozzuk meg a következő mátrixok sajátértékeit, sajátvektorait, spektrális projekcióit és spektrál felbontását!

$$\sigma_x = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \qquad \sigma_y = \begin{bmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{bmatrix}, \qquad \sigma_z = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

3. Gyakorlat:

Milyen transzformációt ír le az

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

mátrix? Határozzuk meg A sajátértékeit, sajátvektorait, spektrális projekcióit és spektrálfelbontását!

4. Gyakorlat:

Határozzuk meg az

$$A = \frac{\pi}{12}\begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 5 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

mátrix spektrálfelbontását valamint az $\arcsin(A)$ mátrixot!

5. Gyakorlat:

Határozzuk meg az

$$A = \frac{1}{5}\begin{bmatrix} 9 & -2 & 0 \\ -2 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 10 \end{bmatrix}$$

mátrix spektrálfelbontását valamint az e^A mátrixot!

1.3. Duális tér, transzponált, adjungált

1. Gyakorlat:
A végtelen valós sorozatok $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ vektorterében legyen $\mathbb{V}_0$ a véges sok nem nulla elemet tartalmazó sorozatok halmaza.

a) Igazoljuk, hogy $\mathbb{V}_0$ altér!

b) Adjunk meg $\mathbb{V}_0$-ban egy bázist!

c) Adjuk meg a $\mathbb{V}_0^*$ duális teret!

d) Igazoljuk, hogy $\mathbb{V}_0 \subsetneqq \mathbb{V}_0^{**}$, azaz bizonyítsuk, hogy $\exists \Phi \in \mathbb{V}_0^{**}$, melyre $\Phi \notin \operatorname{Ran} J$, ahol $J : \mathbb{V}_0 \xrightarrow{\subset} \mathbb{V}^{**}$ a vektortér természetes beágyazása a biduálisába!

2. Gyakorlat:
Igazoljuk, hogy ha a $\mathbb{V}$ véges dimenziós vektortérben $\{b_i\}_{i=1}^n \subset \mathbb{V}$ bázis, $\{\beta_i\}_{i=1}^n \subset \mathbb{V}^*$ az ehhez tartozó duális bázis, és $\{\tilde{\beta}_i\}_{i=1}^n \subset \mathbb{V}^{**}$ pedig a duális bázishoz tartozó duális bázis, akkor $\tilde{\beta}_i = J(b_i)$, ahol $J : \mathbb{V}_0 \xrightarrow{\subset} \mathbb{V}^{**}$ a vektortér természetes beágyazása a biduálisába!

3. Gyakorlat:
Határozzuk meg az $\mathbb{R}^3$ euklideszi térben az

$$a = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \qquad b = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}, \qquad c = \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}$$

bázis duálisát! Adjuk meg az általános formulát is!

4. Gyakorlat:
Igazoljuk, hogy lineáris leképezés transzponáltjára teljesülnek a következő tulajdonságok!

a) $[A^T]_{i,j} = [A]_{j,i}$ (véges dimenzióban);

b) $(A^T)^T = A$ (véges dimenzióban);

c) $(\alpha A + \beta B)^T = \alpha A^T + \beta B^T$;

d) $(AB)^T = B^T A^T$;

e) $(A^{-1})^T = (A^T)^{-1}$ (ha A invertálható).

5. Gyakorlat:

Igazoljuk, hogy (véges dimenziós) euklideszi tér lineáris leképezéseinek adjungáltjára teljesülnek a következő tulajdonságok!

a) $[A^*]_{i,j} = \overline{[A]_{j,i}}$ (ortonormált bázisban);

b) $(A^*)^* = A$;

c) $(\alpha A + \beta B)^* = \overline{\alpha} A^* + \overline{\beta} B^*$;

d) $(AB)^* = B^* A^*$;

e) $(A^{-1})^* = (A^*)^{-1}$ (ha A invertálható).

6. Gyakorlat:

Igazoljuk, hogy $M_n(\mathbb{C})$-ben a $\langle A, B\rangle := \mathrm{Tr}(A^* B)$ belső szorzást definiál! (Hilbert–Schmidt belső szorzás.) Határozzuk meg a $\mathbb{C}I$ altér ortogonális komplenterét!

7. Gyakorlat:

Legyen $A \in M_n(\mathbb{C})$ adott mátrix. Határozzuk meg az A-val való balról szorzás,

$$L_A : M_n(\mathbb{C}) \to M_n(\mathbb{C}), \qquad B \mapsto AB$$

leképezés adjungáltját a Hilbert–Schmidt belső szorzásra nézve!

8. Gyakorlat:

Igazoljuk, hogy egy euklideszi térben az *ortogonális projekció* következő két definíciója ekvivalens!

- **Geometriai definíció:** Egy lineáris leképezés *ortogonális projekció*, ha magtere és képtere ortogonális kiegészítő alterek, és a leképezés képterén az identitás.
- **Algebrai definíció:** Egy P lineáris leképezés *ortogonális projekció*, ha önadjungált ($P^* = P$) és idempotens ($P^2 = P$).

1.4. Tenzorszorzat

1. Gyakorlat:

Legyen U, V vektortér, $j : U \otimes V \to \mathrm{Lin}(V^*, U)$ pedig az a lineáris leképezés, melyre $u \otimes v \in U \otimes V$ és $\phi \in V^*$ esetén $\big(j(u \otimes v)\big)(\phi) = \phi(v)u$. Igazoljuk, hogy j injektív, és pontosan akkor szürjektív, ha $\dim U < \infty$ vagy $\dim V < \infty$!

Milyen hasonló kapcsolat állapítható meg $U \otimes V^*$ és $\mathrm{Lin}(V, U)$ között?

2. Gyakorlat:

Legyen $\big(\mathbb{U}, \langle\cdot,\cdot\rangle_{\mathbb{U}}\big)$ és $\big(\mathbb{V}, \langle\cdot,\cdot\rangle_{\mathbb{V}}\big)$ két (véges dimenziós, komplex) euklideszi tér. Igazoljuk, hogy ekkor az $\mathbb{U}\otimes\mathbb{V}$ tenzorszoztat-téren euklideszi struktúrát definiál az

$$\langle u_1 \otimes v_1, u_2 \otimes v_2\rangle_{\mathbb{U}\otimes\mathbb{V}} := \langle u_1, u_2\rangle_{\mathbb{U}} \cdot \langle v_1, v_2\rangle_{\mathbb{V}}$$

összefüggés, ha első változójában konjugált lineárisan, másodikban lineárisan kiterjesztjük.

3. Gyakorlat:

Legyen $V = \mathbb{R}^3$, és $a := \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$. Egészítse ki az $\{a\}$ halmazt $V \wedge V$ egy bázisává.

4. Gyakorlat:

Írjuk fel az $A : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2$ lineáris operátor esetén az $A \vee A$ és $A \wedge A$ leképezést (alkalmas bázisban), ha A mátrixa $\mathbb{C}^2$ kanonikus bázisában $\left(\begin{smallmatrix}1&2\\3&4\end{smallmatrix}\right)$.

5. Gyakorlat:

Legyen a V véges, n dimenziós vektortérben $\{e_i\}_{i=1}^n$ bázis! Igazoljuk, hogy $V^{\wedge k}$-ban

$$\{e_{i_1} \wedge e_{i_2} \wedge e_{i_3} \wedge \cdots \wedge e_{i_k} \mid 1 \le i_1 < i_2 < i_3 < \cdots < i_k \le n\}$$

bázis, és $\dim V^{\wedge k} = \binom{n}{k}$!

6. Gyakorlat:

Legyen a V véges, n dimenziós vektortérben $\{e_i\}_{i=1}^n$ bázis! Igazoljuk, hogy $V^{\vee k}$-ban

$$\{e_{i_1} \vee e_{i_2} \vee e_{i_3} \vee \cdots \vee e_{i_k} \mid 1 \le i_1 \le i_2 \le i_3 \le \cdots \le i_k \le n\}$$

bázis, és $\dim V^{\vee k} = \binom{n+k-1}{k}$!

7. Gyakorlat:

Legyen L vektortér.

(a) Bizonyítsuk be, hogy ekkor $\otimes^2 L = \wedge^2 L \oplus \vee^2 L$!

(b) Igaz-e, hogy $\otimes^3 L = \wedge^3 L \oplus \vee^3 L$?

8. Gyakorlat:

Legyen $e_1, \ldots, e_n$ ortonormált bázis egy véges dimenziós $(V, <.,.>)$ euklideszi térben. Számoljuk ki az $e_1 \wedge \cdots \wedge e_k$ és $e_1 \vee \cdots \vee e_k$ vektorok normáját.

2. Normált terek, Banach-terek

2.1. Norma axiómái

1. Gyakorlat:

Bizonyítsuk be, hogy ha $(X, \|.\|_X)$ és $(Y, \|.\|_Y)$ normált tér, akkor $B(X, Y)$ (az $X \to Y$ korlátos lineáris operátorok) is normált tér az operátor normával! Továbbá igazoljuk, hogy ha Y Banach-tér, akkor $B(X, Y)$ is Banach-tér!

2. Gyakorlat:

Legyen p_1 és p_2 norma az X téren. Bizonyítsuk be, hogy ekkor $p_1 + p_2$ és $\max(p_1, p_2)$ is norma!

3. Gyakorlat:

Igazoljuk, hogy normált tér egységgömbje (és így bármely középpontú és sugarú gömbje is) konvex halmaz!

4. Gyakorlat:

(a) Vázoljuk $\mathbb{R}^2$-en a különböző p-normák egységgömbjeit, vagyis a $B_p := \{x \in \mathbb{R}^2 : |x_1|^p + |x_2|^p \leq 1\}$ halmazokat, ahol $1 \leq p \leq \infty$!

(b) Definiáljuk B_p-t a fenti módon $0 < p < 1$ esetén is! Konvexek lesznek-e ezek a halmazok?

(c) Normát határoz-e meg $\mathbb{R}^2$-en $\|x\| := (|x_1|^p + |x_2|^p)^{1/p}$, ha $0 < p < 1$?

5. Gyakorlat:

Igazoljuk, hogy $1 \leq p \leq q \leq \infty$ esetén $l^p \subset l^q$, valamint ha $x \in l^p$, akkor $\|x\|_p \geq \|x\|_q$!

2.2. Banach-terek

Szükséges ismeretek: Hahn-Banach tétel algebrai alakja (funkcionálok kiterjeszthetősége), egyenletes folytonosság tétele (Banach–Steinhaus), nyílt leképezés tétele (Banach–Schauder), zárt gráf tétele, korlátos inverz tétel.

1. Gyakorlat:

Legyen X Banach-tér, $Y \subset X$, $z \in X$. Pontosan mikor létezik $\phi \in X^*$, melyre $\phi(y) = 0$ $\forall y \in Y$ és $\phi(z) = 1$? Adjuk ekkor éles alsó becslést $\|\phi\|$-re!

2. Gyakorlat:

Legyen E Banach-tér és $F \subset E$ lineáris altér. Igazoljuk, hogy F pontosan akkor sűrű E-ben, ha minden F-en eltűnő korlátos lineáris funkcionál konstans nulla a teljes E téren, azaz

$$\overline{F} = E \quad \Longleftrightarrow \quad \big((f \in E^* \wedge f|_F = 0) \Rightarrow f \equiv 0\big)!$$

3. Gyakorlat:

Mutassuk meg, hogy $(l^\infty)^*$ szigorúan nagyobb, mint l^1, azaz létezik olyan $\Phi : l^\infty \to \mathbb{C}$ korlátos lineáris funkcionál, amely nem írható föl $x = (x_0, x_1, x_2 \dots) \in l^\infty$ esetén $\Phi(x) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \bar{f}_n x_n$ alakban, ahol $f = (f_0, f_1, f_2 \dots) \in l^1$!

4. Gyakorlat:

Igazoljuk, hogy $(C[0,1], \|\cdot\|_\infty)$ szeparábilis Banach-tér!

5. Gyakorlat:

Igazoljuk, hogy ha egy $A \subset X$ halmaz az X Banach-térben *gyengén korlátos*, azaz minden $\phi \in X^*$ esetén $\phi(A)$ korlátos, akkor A korlátos!

6. Gyakorlat:

Igazoljuk, hogy az l^∞ Banach-térben a konvergens sorozatok c halmaza valamint a zéró sorozatok c_0 részhalmaza zárt lineáris altér!

7. Gyakorlat:

Igazoljuk, hogy $1 \leq p < \infty$ esetén az l^p tér szeparálható!

8. Gyakorlat:

Legyen X és Y Banach-tér. Mutassuk meg, hogy ha $A \in \mathcal{B}(X, Y)$ nyílt, akkor szürjektív!

2.3. Fréchet- és Gâteaux-derivált

Szükséges ismeretek: Fréchet- és Gâteaux-derivált.

1. Gyakorlat:

Tanultuk, hogy minden lineáris leképezés Fréchet-deriváltja önmaga. Legyen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, és $f(x) = x$! Nyilván f lineáris, ugyanakkor $f'(x) = 1 \neq x$. Oldjuk föl a látszólagos ellentmondást!

2. Gyakorlat:

Legyen

$$\Phi : M_n(\mathbb{C}) \to M_n(\mathbb{C}), \qquad A \mapsto A^3.$$

Határozzuk meg Φ Fréchet-deriváltját minden pontban!

3. Gyakorlat:

Legyen $D \subset M_n(\mathbb{C})$ az invertálható mátrixok halmaza. Igazoljuk, hogy D nyílt halmaz (az operátor norma átal indukált topológiában)! Határozzuk meg a $\Phi : D \to M_n(\mathbb{C})$, $\Phi(A) = A^{-1}$ leképezés Fréchet-deriváltját egy tetszőleges $A \in D$ pontban!

4. Gyakorlat:

A 2. és a 3. gyakorlat eredménye valamint a láncszabály alkalmazásával határozzuk meg az invertálható mátrixok halmazán a minusz harmadik hatványra emelés Fréchet-deriváltját! Ellenőrizzük, hogy mindkét kompozíciósorrendet véve ugyanazt az eredményt kapjuk!

5. Gyakorlat:

Igazoljuk, hogy az $f : M_n(\mathbb{C}) \to M_n(\mathbb{C})$, $f(X) = \sin(X)$ leképezés Fréchet-deriváltja az $I \in M_n(\mathbb{C})$ pontban $f'[I]H = (\cos I)H$! Igaz-e hasonló állítás I-től különböző pontokban?

6. Gyakorlat:

Határozzuk meg $A, H \in M_n(\mathbb{C})$, $[A, H] = 0$ esetén az $f(A) = \sin(A)$ leképezés $df'(A, H)$ Gâteaux-deriváltját!

7. Gyakorlat:

Határozzuk meg $A \in M_n(\mathbb{C})$ esetén az $f(A) = \mathrm{Tr}(\sin(A))$ leképezés $f'[A]$ Fréchet-deriváltját!

8. Gyakorlat:

Legyen X Banach-tér, $A \in B(X)$. Számoljuk ki a $t \mapsto \sin tA$ Fréchet-deriváltját, ahol $t \in \mathbb{R}$!

9. Gyakorlat:

Írjuk át az $\tilde{f}(r, \varphi) = r\sin(3\varphi)$ leképezést síkbeli polár-koordinátákból Descartes-koordinátákba! Határozzuk meg az így kapott $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $(x, y) \mapsto f(x, y)$ leképezés $df\big((0,0),(h_x, h_y)\big)$ Gâteaux-deriváltját az origóban! Mekkora a $h_\varphi = (\cos\varphi, \sin\varphi)$ irányú Gâteaux-derivált? (Erre közvetlenül is válaszolhatunk az $\tilde{f}$ polárkoordinátás alakból.) Lineáris-e a Gâteaux-derivált $\mathbf{h}$-ban? Létezik-e f-nek a Fréchet-deriváltja az origóban?

2.4. Funkcionálok és operátorok

Szükséges ismeretek: funkcionál, operátor normája, $l^p - l^q$, $L^p - L^q$ dualitás.

1. Gyakorlat:
Határozzuk meg az

$$\Phi : l^p_{\mathbb{C}} \to \mathbb{C}, \qquad x = (x_0, x_1, x_2 \dots) \mapsto \Phi(x) = x_1 - 4x_2 + 9ix_6$$

funkcionál normáját $p = 1, 2, 3$ és ∞ esetén!

2. Gyakorlat:
Legyen

$$\psi : l^p \to \mathbb{C}, \qquad (a_k)_{k\in\mathbb{N}} \mapsto \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_k}{3^k}$$

funkcionál! Igazoljuk, hogy a funkcionál folytonos, és számoljuk ki $\|\psi\|$ értékét $1 \leq p \leq \infty$ esetén!

3. Gyakorlat:
Milyen $\alpha > 0$ valós szám esetén definiál a

$$\Phi_\alpha : l^3 \to \mathbb{C}, \qquad a = (a_1, a_2, a_3 \dots) \mapsto \Phi_\alpha(a) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k}{k^\alpha}$$

leképezés korlátos lineáris funkcionált?

4. Gyakorlat:
Legyen $g \in C[0,1]$, és M_g jelölje a „g-vel való szorzás” operátorát, tehát $M_g : f \mapsto gf$. Határozzuk meg M_g normáját, ha $f \in C[0,1]$, valamint ha $f \in L^p[0,1]$ $(1 \leq p \leq \infty)$!

5. Gyakorlat:
Folytonosak-e az alábbi leképezések? Ha igen, határozzuk meg normájukat!

(a) $A : C^2[0,1] \to C[0,1], \qquad f \mapsto f;$

(b) $B : C^1[0,1] \to C[0,1], \qquad f \mapsto f';$

(c) $C : C^2[0,1] \to C[0,1], \qquad f \mapsto f'';$

(d) $D : C[0,1] \rightarrowtail C[0,1], \quad \mathrm{Dom}\, A = C[0,1] \cap C^1[0,1], \quad f \mapsto f'.$

Az itt szereplő folytonos, folytonosan deriválható és kétszer folytonosan deriválható függvények terén a normát a következőképpen értelmezzük:

$$
\begin{aligned}
&f \in C[0,1] \text{ esetén} && ||f|| = \sup_{x\in[0,1]}\{|f(x)|\},\\
&f \in C^1[0,1] \text{ esetén} && ||f|| = \sup_{x\in[0,1]}\{|f(x)|\} + \sup_{x\in[0,1]}\{|f'(x)|\},\\
&f \in C^2[0,1] \text{ esetén} && ||f|| = \sup_{x\in[0,1]}\{|f(x)|\} + \sup_{x\in[0,1]}\{|f'(x)|\} + \sup_{x\in[0,1]}\{|f''(x)|.
\end{aligned}
$$

6. Gyakorlat:

Mennyi az $Af(x) = \int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t$ képlettel definiált A operátor normája a $C[0,1]$ és az $L^1[0,1]$ téren?

3. Hilbert-terek és korlátos operátoraik

3.1. A Hilbert-tér geometriája

1. Gyakorlat:

Igazoljuk, hogy $1 \le p \le \infty$, $p \ne 2$ esetén az l^p és $L^p(X,\mu)$ Banach-terekben, valamint a $C[a,b]$ Banach-térben nem teljesül a paralelogramma egyenlőség!

2. Gyakorlat:

Igazoljuk, hogy ha egy Banach-térben teljesül a paralelogramma egyenlőség, akkor a norma származtatható belső szorzásból!

3. Gyakorlat:

Igazoljuk, hogy minden H_0 elő-Hilbert-tér izomorfizmus erejéig egyértelműen teljessé tehető, a következő értelemben.

(a) Létezik egy $\mathcal{H}$ Hilbert-tér és egy $j : \mathcal{H}_0 \overset{\subseteq}{\to} \mathcal{H}$ injektív, belsőszorzat-tartó lineáris beágyazás, melyre $j(\mathcal{H}_0)$ sűrű $\mathcal{H}$-ban!

(b) Ha $(\mathcal{H}, j)$ és $(\mathcal{H}', j')$ is rendelkezik az előző pontban szereplő tulajdonságokkal, akkor egyértelműen létezik egy $b : \mathcal{H} \to \mathcal{H}'$ izomorfizmus (unitér operátor), melyre $b \circ j = j'$ és $b^{-1} \circ j' = j$!

4. Gyakorlat:

Milyen $a, b, c \in \mathbb{C}$ értékek esetén minimális az

$$\int_0^1 |x^3 - a - bx - cx^2|^2\,dx$$

integrál?

5. Gyakorlat:
Igazoljuk, hogy az $n \times n$ méretű komplex mátrixok $M_n(\mathbb{C})$ vektortere az $\langle A, B\rangle = \mathrm{Tr}(A^*B)$ (Hilbert–Schmidt) belső szorzással Hilbert-tér!

3.2. Adjungált

1. Gyakorlat:
Igazoljuk, hogy a Hilbert-terek korlátos operátorain definiált adjungált-fogalom összhangban van a korábban mátrixokon értelmezett adjungálttal, azaz ha $A \in \mathcal{B}(\mathbb{C}^n)$, akkor $(A^*)_{i,j} = \overline{(A_{j,i})}$, ahol $X_{i,j}$ az X operátor mátrixa a $\mathbb{C}^n$ standard bázisában!

2. Gyakorlat:
Legyen $A, B, C \in M_n(\mathbb{C})$. Határozzuk meg a következő operátorok adjungáltját!

$$\begin{aligned} L_A : M_n(\mathbb{C}) &\to M_n(\mathbb{C}), & X &\mapsto AX, \\ \Phi_{B,C} : M_n(\mathbb{C}) &\to M_n(\mathbb{C}), & X &\mapsto BXC. \end{aligned}$$

(Az $M_n(\mathbb{C})$ téren a Hilbert–Schmidt féle belső szorzást tekintjük.) Mikor unitér, önadjungált, normális illetve projekció az L_A illetve a $\Phi_{B,C}$ operátor?

3. Gyakorlat:
Adjuk meg a következő l^2 téren definiált operátorok adjungáltját!

$$\begin{aligned} P_n &: (x_0, x_1, x_2 \dots) \mapsto (x_0, x_1 \dots x_n, 0, 0 \dots), \\ M_a &: (x_0, x_1, x_2 \dots) \mapsto (a_0x_0, a_1x_1, a_2x_2 \dots), \qquad (\forall n \in \mathbb{N} \quad a_n \in \mathbb{C}), \\ R &: (x_0, x_1, x_2 \dots) \mapsto (0, x_0, x_1, x_2 \dots), \\ L &: (x_0, x_1, x_2 \dots) \mapsto (x_1, x_2, x_3 \dots), \\ A_a &: (x_0, x_1, x_2 \dots) \mapsto (0, a_0x_0, a_1x_1, a_2x_2 \dots), \qquad (\forall n \in \mathbb{N} \quad a_n \in \mathbb{C}). \end{aligned}$$

4. Gyakorlat:
Adjuk meg a következő $L^2[0, 1]$ téren értelmezett operátorok adjungáltját!

$$\begin{aligned} (Ax)(t) &= \int_0^t x(\tau)d\tau, & (Bx)(t) &= tx(t), \\ (Cx)(t) &= x(\sqrt{t}), & (Dx)(t) &= \int_0^t \tau x(\tau)d\tau, \\ (Ex)(t) &= \int_0^{\sqrt{t}} \tau x(\tau)d\tau, & (Fx)(t) &= \int_0^{t^2} \tau x(\tau)d\tau. \end{aligned}$$

5. Gyakorlat:

Igazoljuk, hogy P pontosan akkor ortogonális projekció, ha $P = P^*P$ teljesül!

6. Gyakorlat:

Igazoljuk, hogy ha P és Q ortogonális projekció, akkor

$$\begin{array}{lrcl} a) & P+Q \text{ ortogonális projekció} & \Longleftrightarrow & PQ=0, \\ b) & PQ \text{ ortogonális projekció} & \Longleftrightarrow & PQ=QP. \end{array}$$

7. Gyakorlat:

Legyen $A \in B(\mathcal{H})$. Bizonyítsuk be, hogy ha $A - iI$ invertálható, és

$$(A+iI)(A-iI)^{-1}$$

unitér, akkor A önadjungált!

8. Gyakorlat:

Igazoljuk, hogy ha A egy Hilbert-tér korlátos operátora, akkor

$$\operatorname{Ker} A = (\operatorname{Ran} A^*)^{\perp}.$$

3.3. Ortogonális polinomrendszerek

1. Gyakorlat:

Legyen

$$H_n(x) = (-1)^n e^{x^2} \frac{d^n}{dx^n} e^{-x^2} \qquad \textbf{(Rodriguez-formula)}$$

az n-edik Hermite-polinom. Bizonyítsuk be, hogy

a) a H_n polinomok az $L_2(\mu)$ tér bázisát alkotják, ahol μ a Gauss-mérték, azaz sűrűségfüggvénye $\rho(x) = e^{-x^2}$;

b) Igazoljuk, hogy H_n főegyütthatója 2^n.

c) Igazoljuk a következő összefüggéseket:

$$\begin{aligned} H_n' &= 2xH_n - H_{n+1}, \\ H_{n+1}(x) &= 2xH_n(x) - 2nH_{n-1}(x), && \textbf{(rekurziós összefüggés)} \\ H_n'(x) &= 2nH_{n-1}, \\ 0 &= H_n''(x) - 2xH_n'(x) + 2nH_n(x). && \textbf{(differenciálegyenlet)} \end{aligned}$$

d) Igazoljuk, hogy a Hermite-polinomok **generátorfüggvénye** $e^{t(2x-t)}$, azaz

$$\exp(2xt - t^2) = \sum_{n=0}^{\infty} H_n(x) \frac{t^n}{n!}.$$

e) Igazoljuk,hogy

$$||H_n(x)||^2 = \sqrt{\pi} 2^n n!.$$

2. Gyakorlat:

Az Hermite-polinomok generátorfüggvényének segítségével bizonyítsuk be, hogy a Fourier-transzformáció sajátfüggvényei az Hermite-függvények!

3.4. Topológiák

1. Gyakorlat:

Mutassuk meg, hogy az $S_1 = \{x \in l^2 \mid ||x|| = 1\} \subset l^2$ egységgömb lezártja $B_1 = \{x \in l^2 \mid ||x|| \leq 1\} \subset l^2$, azaz

(a) Igazoljuk, hogy $x_n \xrightarrow{w} x$ és $||x_n|| \leq c$ esetén $||x|| \leq c$!

(b) Tetszőleges $y \in B_1$ vektor esetén adjunk meg egy olyan $\{x_n\} \subset S_1$ sorozatot, mely gyengén konvergál y-hoz!

2. Gyakorlat:

Legyen $\mathcal{H}$ szeparábilis Hilbert-tér, és $\{e_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{H}$ ortonormált bázis. Igazoljuk, hogy ekkor $x, y \in \mathcal{H}$ esetén

$$d(x, y) = \sum_{n\in\mathbb{N}} 2^{-n} |\langle x - y, e_n\rangle|$$

metrika a $\mathcal{H}$ téren, és ha $x_n \xrightarrow{w} x$, akkor $d(x_n, x) \xrightarrow{n\to\infty} 0$.

3. Gyakorlat:

Legyen M a $\mathcal{H}$ Hilbert-tér egy olyan részhalmaza, melynek lineáris burka sűrű $\mathcal{H}$-ban! Igazoljuk, hogy ha $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{H}$ korlátos sorozat, és $\exists x \in \mathcal{H}$, melyre $\forall y \in M$ esetén $\langle x_n, y\rangle \xrightarrow{n\to\infty} \langle x, y\rangle$, akkor $x_n \xrightarrow{w} x$!

4. Gyakorlat:

Konvergensek-e az l^2 téren a norma-, illetve a gyenge topológiában a következő sorozatok? Ha igen, adjuk meg a határértéküket is!

$$x_n = \frac{1}{\sqrt{n+1}} \delta_n, \qquad y_n = \sum_{k=2^n}^{2^{n+1}-1} \delta_k, \qquad z_n = \frac{1}{\sqrt{2^n}} y_n, \qquad w_n = \frac{1}{2^n} y_n$$

5. Gyakorlat:
Legyen $\mathcal{H}$ Hilbert-tér, $A_n, A \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$! Igaz-e, hogy

(a) ha $A_n \to A$, akkor $||A_n|| \to ||A||$? (Igaz.)

(b) ha $A_n \to A$, akkor $\{||A_n||\}$ korlátos? (Igaz.)

(c) ha $A_n \xrightarrow{so} A$, akkor $||A_n|| \to ||A||$? (Hamis.)

(d) ha $A_n \xrightarrow{so} A$, akkor $\{||A_n||\}$ korlátos? (Igaz.)

(e) ha $A_n \xrightarrow{wo} A$, akkor $||A_n|| \to ||A||$? (Hamis.)

(f) ha $A_n \xrightarrow{wo} A$, akkor $\{||A_n||\}$ korlátos? (Igaz.)

Az állításokat bizonyítsuk!

6. Gyakorlat:
Legyen $\mathcal{H}$ szeparábilis Hilbert-tér, és $\{e_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{H}$ ortonormált bázis. Igazoljuk, hogy ekkor $A, B \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ esetén

$$d(A,B) = \sum_{n,m\in\mathbb{N}} 2^{-(n+m)} |\langle e_n, (A-B)e_m\rangle|$$

metrika a $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ téren, és ha $A_n \xrightarrow{wo} A$ akkor $d(A_n, A) \xrightarrow{n\to\infty} 0$.

7. Gyakorlat:
Adjunk meg egy d metrikát a $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ halmazon úgy, hogy tetszőleges $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{B}(\mathcal{H})$ sorozat esetén

$$A_n \xrightarrow{so} A \quad \Longleftrightarrow \quad d(A_n, A) \xrightarrow{n\to\infty} 0 \text{ és } \sup_{n\in\mathbb{N}}\{||A_n||\} < \infty.$$

8. Gyakorlat:
Melyik operátor-topológiában létezik, és mi a határértéke a következő operátor-sorozatoknak?

$$A_n : l^2 \to l^2, \quad A_n(x_0, x_1, x_2 \dots) = (\underbrace{0, 0 \dots 0}_{n \text{ darab}}, (-1)^n x_n, (-1)^{n+1} x_{n+1}, \dots);$$

$$B_n : l^2 \to l^2, \quad B_n(x_0, x_1, x_2 \dots) = (x_0, x_n, x_{2n}, x_{3n} \dots);$$

9. Gyakorlat:

Az $A \in \mathcal{B}(l^2)$ operátort definiálja az

$$A\delta_n = \delta_{2n}, \qquad \forall n \in \mathbb{N}$$

egyenlőség! Mennyi az A operátor normája? Milyen operátor-topológiában konvergens, és hova tart az $\{A^n\}_{n\in\mathbb{N}}$ operátor-sorozat?

10. Gyakorlat:

Igazoljuk, hogy ha P és Q tetszőleges ortogonális projekció, akkor $(PQ)^n$ konvergens az erős operátor-topológiában! Mi a sorozat határértéke?

11. Gyakorlat:

Igaz-e, hogy ha $A_n \xrightarrow{so} A$ és $B_n \xrightarrow{so} B$, akkor $A_n B_n \xrightarrow{so} AB$?

12. Gyakorlat:

Igazoljuk, hogy egy Hilbrt-tér unitér operétorai az erős operátor-topológiában folytonos topologikus csoportot alkotnak, azaz ha U_n, V_n, U, V unitér operátorok, $U_n \xrightarrow{so} U$ és $V_n \xrightarrow{so} V$ akkor $U_n V_n \xrightarrow{so} UV$ és $U_n^{-1} \xrightarrow{so} U^{-1}$!

3.5. Kompakt operátorok

1. Gyakorlat:

Igaz-e, hogy a kompakt operátorok halmaza az erős operátor-topológiában zárt?

2. Gyakorlat:

Milyen $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{C}$ sorozatra kompakt az

$$A : l^2 \to l^2, \qquad A(x_0, x_1, x_2 \dots) = (a_0 x_0, a_1 x_1, a_2 x_2 \dots)$$

operátor?

3. Gyakorlat:

Bizonyítsuk be, hogy végtelen dimenziós Hilbert-tér kompakt operátorának nincs korlátos inverze!

3.6. Spektrum, spektráltétel

1. Gyakorlat:

Legyen A és B két invertálható mátrix. Igazoljuk, hogy AB és BA spektruma azonos!

2. Gyakorlat:
Legyen $T \in B(l^2)$,

$$T(x_1, x_2, x_3, x_4, \dots) = \left(x_1, \frac{1}{2}x_2, \frac{1}{3}x_3, \frac{1}{4}x_4, \dots\right).$$

Határozzuk meg T spektrumát!

3. Gyakorlat:
Az l^2 tér T operátorát a

$$T(x_1, x_2, x_3, x_4, \dots) = \left(\frac{1}{2}x_2, \frac{1}{3}x_3, \frac{1}{4}x_4, \dots\right)$$

képlettel definiáljuk.

a) Adjuk meg T normáját!

b) Adjuk meg T pontspektrumát és sajátvektorait!

c) Adjuk meg T adjungáltját!

d) Adjuk meg T^* pontspektrumát és rezolvens halmazát!

4. Gyakorlat:
Adjuk meg az $A : L^2[0, 1] \to L^2[0, 1]$,

$$(Af)(x) := \frac{f(x)}{2 - x}$$

operátor spektrumát!

5. Gyakorlat:
Határozzuk meg az l^2 téren értelmezett balra és jobbratolás operátor spektrumát és annak részeit!

6. Gyakorlat:
Igazoljuk az első rezolvens-formulát:

$$R_\lambda(T) - R_\mu(T) = (\mu - \lambda)R_\mu(T)R_\lambda(T).$$

Itt T egy Hilbert-tér korlátos operátora, és $\lambda, \mu \in \rho(T)$.

7. Gyakorlat:
Igazoljuk a második rezolvens-formulát:

$$R_\lambda(A) - R_\lambda(B) = R_\lambda(A)(A - B)R_\lambda(B).$$

Itt A, B egy Hilbert-tér két korlátos operátora, és $\lambda \in \rho(A) \cap \rho(B)$.

8. Gyakorlat:

Legyen A önadjungált operátor egy $\mathcal{H}$ Hilbert téren, és $z = a + ib$, $b \neq 0$. Igazoljuk, hogy ekkor az

$$(A + zI)(A + \overline{z}I)^{-1}$$

operátor unitér!

9. Gyakorlat:

Legyenek $\{P_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ páronként egymásra ortogonális projekciók, és $\{\lambda_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{C}$ tetszőleges konstansok.

a) Milyen $\{\lambda_n\}$ sorozat esetén konvergens a $\sum_{n=0}^{\infty} \lambda_n P_n$ sor az erős operátor-topológiában illetve az operátornomra topológiában?

b) A $\sum_{n=0}^{\infty} \lambda_n P_n$ operátor milyen $\{\lambda_n\}$ sorozat esetén normális, önadjungált, projekció, illetve unitér?

c) Határozzuk meg a $\sum_{n=0}^{\infty} \lambda_n P_n$ operátor normáját, adjungáltját, spektrumát és annak részeit.

10. Gyakorlat:

Határozzuk meg az $L^2[-1, 1]$ téren értelmezett

$$(Af)(x) = 2f(x) - f(-x) \qquad (f \in l^2[-1, 1], x \in [-1, 1])$$

operátor spektrálfelbontását, valamint az e^A operátort!

11. Gyakorlat:

Adjuk meg az $M : L^2[0, 1] \to L^2[0, 1]$,

$$(Mf)(x) := [2x]xf(x)$$

operátor pont-, folytonos és reziduális spektrumát!

12. Gyakorlat:

Ha $H \subset [0, 1]$ egy Borel-halmaz, akkor legyen

$$\mu(H) := \begin{cases} \frac{2}{3}\lambda(H), & \text{ha } \frac{1}{4} \notin H, \\ \frac{2}{3}\lambda(H) + \frac{1}{3}, & \text{ha } \frac{1}{4} \in H, \end{cases}$$

ahol λ a Lebesgue-mérték. Mi az $L^2(\mu)$ térben az x^2 függvénnyel való szorzás operátorának spektruma?

4. Nemkorlátos operátorok

Ebben a fejezetben a „lineáris operátor” fogalmához nem társítjuk sem azt, hogy a leképezés mindenütt értelmezve van, sem a korlátosságot.

13. Gyakorlat:
Igazoljuk, hogy az A lineáris operátor pontosan akkor lezárható, ha $(0,h) \in \overline{\Gamma(A)}$ esetén $h = 0$!

14. Gyakorlat:
Legyen a T lineáris operátor értelmezési tartománya és hatása:

$$D(T) = \{f \in L^2[0,1] \mid f \in C^1[0,1]\}, \qquad Tf = f'.$$

Igazoljuk, hogy T nem korlátos operátor!

15. Gyakorlat:
Igazoljuk, hogy a következő lineáris operátorok szimmetrikusak!

a) $D(A) = \{f \in L^2[0,1] \mid f \in C^1[0,1],\ f(0) = f(1) = 0\}, \quad Af = if';$
b) $D(B) = \{f \in L^2[0,1] \mid f \in C^2[0,1],\ f(0) = f(1) = 0\}, \quad Bf = f'';$
c) $D(C) = \{f \in L^2[0,1] \mid f \in C^2[0,1],\ f'(0) = f'(1) = 0\}, \quad Cf = f''.$

16. Gyakorlat:
Legyen Q a

$$D(Q) = \left\{ f \in L^2(\mathbb{R}) \;\middle|\; \int_{\mathbb{R}} |xf(x)|^2 dx < \infty \right\} \subset L^2(\mathbb{R})$$

értelmezési tartományon az x változóval való szorzás operátora:

$$(Qf)(x) = xf(x) \qquad \forall f \in D(Q),\ x \in \mathbb{R}.$$

Igazoljuk, hogy Q önadjungált!

17. Gyakorlat:
Legyen $f : \mathbb{N} \to \mathbb{C}$ tetszőleges függvény, és ennek segítségével definiáljuk az M_f „szorzás operátort” a következőképpen:

$$D(M_f) = \left\{ x \in l^2(\mathbb{N}) \;\middle|\; \sum_{n \in \mathbb{N}} |f(n)|^2 |x_n|^2 < \infty \right\}, \qquad M_f(x) = \sum_{n \in \mathbb{N}} f(n) x_n \delta_n.$$

Igazoljuk, hogy M_f zárt operátor!

18. Gyakorlat:

Igazoljuk, hogy ha Z zárt operátor, B pedig az egész Hilbert-téren értelmezett korlátos operátor, akkor ZB zárt operátor!

19. Gyakorlat:

Legyen a T operátor a

$$D(T) = \left\{ x \in l^2(\mathbb{N}) \;\middle|\; \sum_{n \in \mathbb{N}} n|x_n|^2 < \infty \right\} \subset l^2(\mathbb{N})$$

altéren a

$$T(x) = \sum_{n \in \mathbb{N}} \sqrt{n+1}\, x_{n+1} \delta_n$$

formulával értelmezve! Jelölje továbbá tetszőleges $z \in \mathbb{C}$ esetén

$$e(z) = \sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{z^n}{\sqrt{n!}} \delta_n$$

a z-hez tartozó *exponenciális vektort*!

a) Igazoljuk, hogy $x \in D(T)$ esetén a T operátor definíciójának jobb oldalán szereplő sor konvergens (sőt, feltétel nélkül konvergens), tehát a definíció korrekt!

b) Igazoljuk, hogy T zárt operátor!

c) Igazoljuk, hogy $e(z) \in l^2(\mathbb{N})$, és határozzuk meg $e(z)$ normáját!

d) Igazoljuk, hogy tetszőleges $z \in \mathbb{C}$ esetén $Te(z) = e(z)$, tehát $\sigma(T) = \sigma_p(T) = \mathbb{C}$!

5. Kvantummechanikai kitekintés