1

2. feladat (11 pont*)
Számolja ki az $f(x) = e^{2x}\sin(3x)$ függvény határozatlan integrálját!

Parc. int.: $\int u(x)v'(x)\,dx = u(x)\,v(x) - \int u'(x)\cdot v(x)\,dx$

a, $\int \underbrace{\text{polinom}}_{u} \cdot \underbrace{\left\{\begin{array}{ll} \text{trig} & (\sin x, \cos x) \\ \text{hip.} & (\operatorname{sh} x, \operatorname{ch} x) \\ \text{exp} & (e^x) \end{array}\right\}}_{v'} dx$

b, $\int \underbrace{\text{polinom}}_{v'} \cdot \underbrace{\left\{\begin{array}{ll} \arcsin(ax+b); & \arccos(ax+b) \\ \operatorname{arsh}(ax+b); & \operatorname{arch} \\ \ln & \end{array}\right\}}_{u} dx$

c, $\int \underbrace{\left\{\begin{array}{ll} \sin(ax+b); & \cos \\ \operatorname{sh}, & \operatorname{ch} \\ \exp & \end{array}\right\}}_{u} \cdot \underbrace{\left\{\begin{array}{ll} \sin(cx+d), & \cos \\ \operatorname{sh} & \operatorname{ch} \\ \exp & \end{array}\right\}}_{v'} dx$

2-szer parc. $\int \Rightarrow$ egyenlet

$$I = \int \underbrace{e^{2x}}_{u} \cdot \underbrace{\sin(3x)}_{v'}\,dx = \frac{-1}{3}\cdot e^{2x}\cos(3x) - \left(\frac{-2}{3}\right)\int \underbrace{e^{2x}}_{u}\underbrace{\cos(3x)}_{v'}\,dx =$$

$u'(x) = 2e^{2x}$; $v(x) = \frac{-1}{3}\cos(3x)$ $\qquad$ $u' = 2e^{2x}$; $v = \frac{1}{3}\sin(3x)$

$$= \frac{-1}{3}e^{2x}\cos(3x) + \frac{2}{3}\left(\frac{1}{3}e^{2x}\sin(3x) - \frac{2}{3}\underbrace{\int e^{2x}\sin(3x)\,dx}_{I}\right)$$

Egyenlet I-re:

$$I = \frac{-1}{3}e^{2x}\cos(3x) + \frac{2}{9}e^{2x}\sin(3x) - \frac{4}{9}I$$

$$\underbrace{\left(1+\frac{4}{9}\right)}_{\frac{13}{9}} I = \frac{-1}{3}e^{2x}\cos(3x) + \frac{2}{9}e^{2x}\sin(3x)$$

$$I = \frac{9}{13}\left(\frac{-1}{3}e^{2x}\cos(3x) + \frac{2}{9}e^{2x}\sin(3x)\right) + C = \frac{-3}{13}e^{2x}\cos(3x) + \frac{2}{13}e^{2x}\sin(3x) + C$$

②

Számolja ki az $\underbrace{\int_0^\infty \frac{2}{x^2+8x+12}\,dx}_{I}$ integrált!

$$I = \lim_{\Omega\to\infty} \int_0^\Omega \left(\frac{1/2}{x+2} + \frac{-1/2}{x+6}\right) dx = \lim_{\Omega\to\infty} \left[\frac{1}{2}\ln|x+2| - \frac{1}{2}\ln|x+6|\right]_0^\Omega =$$

PARCIÁLIS TÖRTEKRE BONTÁS

$$x^2+8x+12 = (x+2)(x+6)$$

$$\frac{2}{x^2+8x+12} = \frac{A}{x+2} + \frac{B}{x+6} \Rightarrow 2 = A(x+6) + B(x+2)$$

$x=-2$: $2 = 4A \Rightarrow A = \frac{1}{2}$

$x=-6$: $2 = -4B \Rightarrow B = -\frac{1}{2}$

$$= \lim_{\Omega\to\infty}\left[\frac{1}{2}\ln\left|\frac{x+2}{x+6}\right|\right]_0^\Omega = \frac{1}{2}\left(\lim_{\Omega\to\infty} \underbrace{\ln\underbrace{\left|\frac{\Omega+2}{\Omega+6}\right|}_{\xrightarrow{\Omega\to\infty} 1}}_{\ln 1 = 0} - \underbrace{\ln\left|\frac{2}{6}\right|}_{\ln\frac{1}{3} = -\ln 3}\right) = \frac{\ln 3}{2}$$

---

③

2. feladat (15 pont) A határozott integrálról tanultak alapján mutassuk meg, hogy

$$\int_{-5}^{5} \underbrace{\frac{1}{\sqrt[4]{e^{-8x}+16e^{4x}}}}_{=f(x)}\,dx$$

értéke egy 0 és 1 közötti szám. *Jótanács: ne próbálkozzunk a kérdéses integrál konkrét kiszámolásával!*

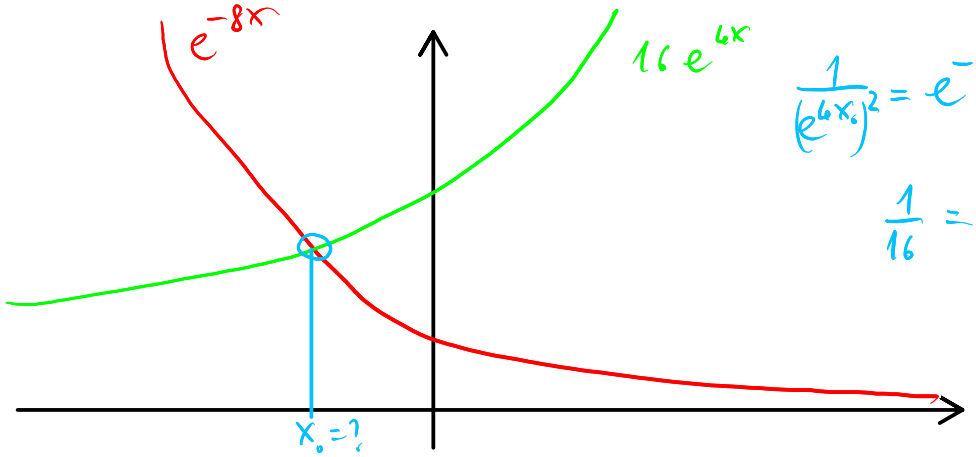
Ötlet:

$$g(x) \le f(x) \le h(x) \quad \forall x \in I$$

$$\Downarrow$$

$$\int_I g(x)\,dx \le \int_I f(x)\,dx \le \int_I h(x)\,dx$$

$f(x)$-re felső becslés kell $\Longleftrightarrow$ $e^{-8x}+16e^{4x}$-re alsó becslés kell.



$$\frac{1}{(e^{4x_0})^2} = e^{-8x_0} = 16e^{4x_0}$$

$$\frac{1}{16} = (e^{4x_0})^3 \ \ldots$$

$$\int_{-5}^{5} f(x)\,dx = \int_{-5}^{0} \underbrace{\frac{1}{\sqrt[4]{e^{-8x}+16e^{6x}}}}_{\geq \frac{1}{\sqrt[4]{e^{-8x}+0}} = e^{2x}} dx + \int_{0}^{5} \underbrace{\frac{1}{\sqrt[4]{e^{-8x}+16e^{6x}}}}_{\geq \frac{1}{\sqrt[4]{0+16e^{6x}}} = \frac{1}{2}e^{-x}} dx \leq$$

$$\leq \int_{-5}^{0} e^{2x}\,dx + \frac{1}{2}\int_{0}^{5} e^{-x}\,dx = \underbrace{\left[\frac{e^{2x}}{2}\right]_{-5}^{0}}_{\frac{1}{2}-\frac{e^{-10}}{2}} + \frac{1}{2}\underbrace{\left[-e^{-x}\right]_{0}^{5}}_{-e^{-5}+1} = \frac{1}{2} \underbrace{- \frac{e^{-10}}{2} - \frac{e^{-5}}{2}}_{<0} + \frac{1}{2} \leq$$

$$\leq \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = \underline{1}$$

4

Bár egzakt módon nehéz lenne kiszámolni az $\int_{-5}^{7} \frac{1}{\sqrt[3]{e^{-3x}+1}}\,dx$ integrál értékét, a határozott integrálról tanult összefüggések és becslések segítségével mutassuk meg, hogy értéke 0 és $(e^0 - e^{-5}) + 7 = 8 - e^{-5}$ között van.

HASONLÓ az előzőhöz

$$0 < \frac{1}{\sqrt[3]{e^{-3x}+1}} \leq \begin{cases} \frac{1}{\sqrt[3]{0+1}} = 1 \\ \frac{1}{\sqrt[3]{e^{-3x}+0}} = e^{x} \end{cases} \quad \min(1, e^x) = \begin{cases} \leq 1, & \text{ha } x \geq 0 \\ \leq e^x, & \text{ha } x \leq 0 \end{cases}$$

$$0 < \int_{-5}^{7} \overbrace{\frac{1}{\sqrt[3]{e^{-3x}+1}}}^{f(x)} dx = \int_{-5}^{0} f(x)\,dx + \int_{0}^{7} f(x)\,dx \leq \underbrace{\int_{-5}^{0} e^{x}\,dx}_{\underbrace{e^0}_{1} - e^{-5}} + \underbrace{\int_{0}^{7} 1\,dx}_{7} = \underline{8 - e^{-5}}$$

5

6. Tekintsük az $a_1 = 3$; $a_{n+1} = \sqrt{8a_n - 12}$ rekurzióval adott sorozatot!

A sorozat monoton csökken.	☐ I;	■ H;
A sorozatnak felső korlátja 7.	■ I;	☐ H;
A sorozat divergens.	☐ I;	■ H;

$a_2 = \sqrt{8 \cdot a_1 - 12} = \sqrt{24-12} = \sqrt{12} > 3 = a_1 \Rightarrow$ nem monoton csökken

Sejtés: $(a_n) \nearrow$. Bizi.: Teljes ind.

α, $a_2 = \sqrt{12} > a_1 = 3$ ✓ ; β, T.f.h. $a_{n+1} > a_n > 3 \Rightarrow 8a_{n+1} - 12 > 8a_n - 12 > 12$

$\Rightarrow \sqrt{8a_{n+1} - 12} = a_{n+2} > \sqrt{8a_n - 12} = a_{n+1}$ ✓

Ha $\exists \lim\limits_{n\to\infty} a_n = A$, akkor $A = \sqrt{8A-12} \Rightarrow A^2 - 8A + 12 = (A-6)(A-2) = 0$

$\Rightarrow A = 6$ vagy $A = 2$ ↯ ($a_1 = 3 > 2$, $(a_n) \nearrow$)

Szerint: $\forall n: a_n < 6$. Biz.: Teljes ind.)

α) $a_1 = 3 < 6$ ✓ β) T.h.: $a_n < 6 \Rightarrow 8a_n - 12 < 48 - 12 = 36$

$\Rightarrow \sqrt{8a_n - 12} = a_{n+1} < \sqrt{36} = 6$ ✓

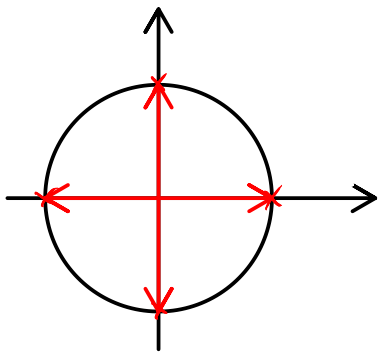
$\left.\begin{array}{l} a_n \nearrow \\ a_n < 6 \end{array}\right\} \Rightarrow \exists \lim a_n \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} a_n = 6$

$\forall n: a_n < 6 \Rightarrow 7$ felső korlát ✓

6

3. Hány torlódási pontja van az $a_n = \sqrt[n]{\left(1+\sin\left(\frac{n\pi}{2}\right)\right)7^n + 3^n}$ sorozatnak?

☐ 0; ☐ 1; ■ 2; ☐ 3; ☐ 4; ☐ más.



$$\sin\left(\frac{n\pi}{2}\right) = \begin{cases} 0, & \text{ha } n = 2k \\ +1, & \text{ha } n = 4k+1 \\ -1, & \text{ha } n = 4k+3 \end{cases} \qquad k \in \mathbb{Z}$$

a) $n = 2k$; $\underbrace{\sqrt[n]{7^n}}_{=7} < a_n = \sqrt[n]{7^n + 3^n} < \sqrt[n]{7^n + 7^n} = \sqrt[n]{2\cdot 7^n} = \underbrace{\sqrt[n]{2}}_{\to 1}\cdot 7 \to 7$

$\Rightarrow a_{2k} \xrightarrow{k\to\infty} 7$ (tor. pont)

b) $n = 4k+1$ $\underbrace{\sqrt[n]{2\cdot 7^n}}_{\to 7} < a_n = \sqrt[n]{2\cdot 7^n + 3^n} < \sqrt[n]{2\cdot 7^n + 7^n} = \sqrt[n]{3}\cdot 7 \to 7$

$\Rightarrow a_{4k+1} \xrightarrow{k\to\infty} 7$

c) $n = 4k+3$; $a_n = \sqrt[n]{(1-1)7^n + 3^n} = 3$ (Tor. pont)

Torlódási pontok: 3, 7 (2 db)

7

(d) Adjon példát olyan $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvényekre, hogy

i. f és $f \circ g$ folytonos, de g nem az. (Jelölés: $(f \circ g)(x) = f(g(x))$)

ii. f és g nem folytonos, de $f + g$ folytonos.

i/

$$g(x) = \begin{cases} 0, & \text{ha } x \in \mathbb{Q} \\ 1, & \text{ha } x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$$ Sehol nem folyt.

$f(x) := 0$ folyt. ; $(f \circ g)(x) = f(g(x)) = 0$ folyt. ✓

ii/

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{ha } x \notin \mathbb{Q} \\ 1, & \text{ha } x \in \mathbb{Q} \end{cases} \qquad g(x) = \begin{cases} 0, & \text{ha } x \in \mathbb{Q} \\ 1, & \text{ha } x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$$

$$(f+g)(x) = \left.\begin{cases} 1+0 = 1, & \text{ha } x \in \mathbb{Q} \\ 0+1 = 1, & \text{ha } x \notin \mathbb{Q} \end{cases}\right\} = 1 \quad \text{folyt.}$$

HELYETTESÍTÉSES INT.:

$$\left(f(g(x))\right)' = f'(g(x)) \cdot g'(x)$$

$$\underbrace{f(g(x))+C}_{f(y)+C} = \int \left(f(g(x))\right)' dx = \int f'(\underbrace{g(x)}_{y})\, \underbrace{g'(x)}_{y'(x)}\, dx \qquad f' = h, \quad f = H$$

$$H(y) + C \Big|_{y(x)} = \int h(y(x))\, y'(x)\, dx$$

$$H(y) = \int h(y)\, dy$$

régi, régi

Határozott $\int$-re:

$$\int_{x=x_1}^{x_2} f(x)\, dx = \int_{t=\varphi^{-1}(x_1)}^{\varphi^{-1}(x_2)} f(\varphi(t)) \cdot \underbrace{\varphi'(t)\, dt}_{dx}$$

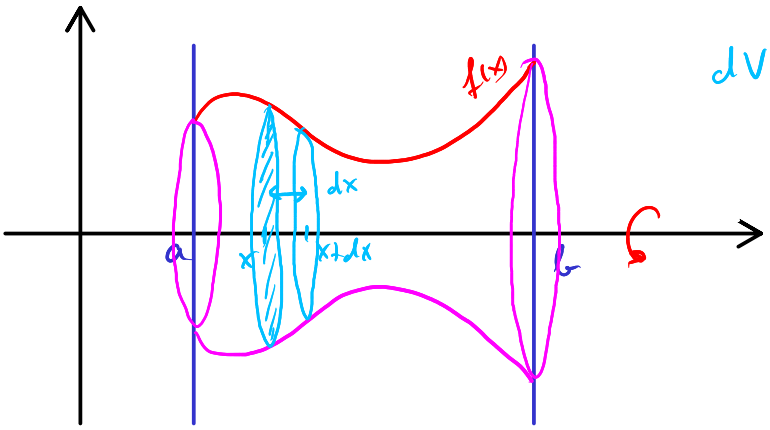
régi $x \leftrightarrow t$ új

$x = \varphi(t) \Rightarrow dx = \varphi'(t)\, dt$

8

3. feladat (12 pont*)

Számolja ki az $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$, $x \in [2,3]$ görbe x tengely körüli megforgatásával keletkezett forgástest térfogatát!



$$dV(x) = \pi f^2(x)\,dx$$

$$V = \int dV(x) = \pi \int_a^b f^2(x)\,dx$$

MOST:

$$V = \pi \int_2^3 \frac{1}{x^2-1}\,dx = \frac{\pi}{2}\int_2^3 \left(\frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+1}\right) dx = \frac{\pi}{2}\Big[\ln(x-1) - \ln(x+1)\Big]_2^3 =$$

$$x^2-1 = (x+1)(x-1)$$

$$\frac{1}{x^2-1} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x-1} \Rightarrow 1 = A(x-1) + B(x+1)$$

$x=1$: $1 = 2B \Rightarrow B = \frac{1}{2}$

$x=-1$: $1 = -2A \Rightarrow A = -\frac{1}{2}$

$$= \frac{\pi}{2}\left(\ln 2 - \ln 4 - (\underbrace{\ln 1}_{0} - \ln 3)\right) = \frac{\pi}{2}\ln\frac{2\cdot 3}{4} = \frac{\pi}{2}\ln\frac{3}{2}$$