Komplex számok halmaza. Jele $\mathbb{C}$.

Definíció

$$\mathbb{C} = \mathbb{R}^2 = \{(x, y) : x, y \in \mathbb{R}\}.$$

A műveletek $z_1 = (x_1, y_1)$ és $z_2 = (x_2, y_2)$ jelölésekkel:

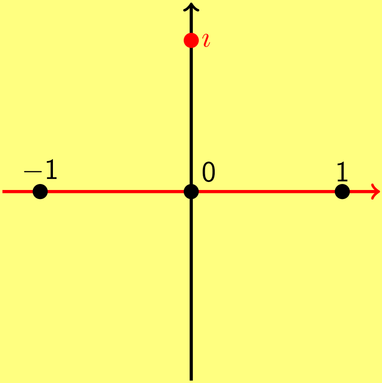
$$z_1 + z_2 = (x_1 + x_2, y_1 + y_2);$$

$$z_1 z_2 = (x_1 x_2 - y_1 y_2, x_1 y_2 + x_2 y_1);$$

Mielőtt megmutatjuk, hogy a komplex számok is testet alkotnak bevezetjük a következőket.

$\mathbb{R}$-et azonosítjuk $\mathbb{R} \times \{0\}$-val, így $\mathbb{R} \sim \mathbb{R} \times \{0\} \subset \mathbb{C}$. ($x \in \mathbb{R}$ esetén a megfeleltetés $x \sim (x, 0) \in \mathbb{C}$.)
Ekkor $(1, 0) = 1$ a valós egység, és $\imath = (0, 1)$ a képzetes egység. Vegyük észre, hogy

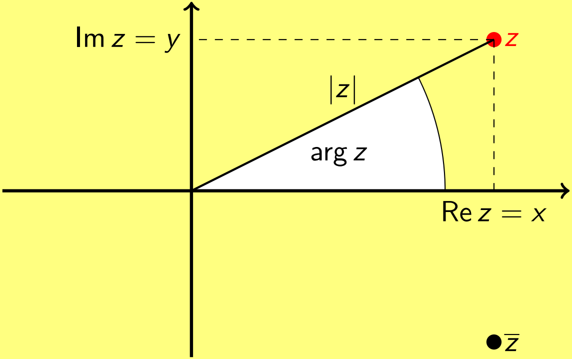
$$\imath^2 = (0,1) \cdot (0,1) = (0 \cdot 0 - 1 \cdot 1, 0 \cdot 1 + 1 \cdot 0) = (-1, 0) = -1.$$



CSAK VÁZLAT (PG)

A $z=(x,y)$ komplex szám esetén:

- valós rész: $\operatorname{Re} z = x \in \mathbb{R}$;
- képzetes rész: $\operatorname{Im} z = y \in \mathbb{R}$;
- abszolút érték: $|z| = \sqrt{x^2+y^2} \geq 0$;
- argumentum: $\arg z = \begin{cases} \arccos\left((\operatorname{Re} z)/|z|\right), & \text{ha } 0 \leq \operatorname{Im} z; \\ -\arccos\left((\operatorname{Re} z)/|z|\right), & \text{ha } \operatorname{Im} z < 0; \end{cases}$
- konjugált: $\overline{z} = (x, -y)$;



CSAK VÁZLAT (PG)

A z komplex szám algebrai alakja

$$z = 1\,\mathrm{Re}\,z + \imath\,\mathrm{Im}\,z = \mathrm{Re}\,z + \imath\,\mathrm{Im}\,z.$$

Ha $z = (x, y)$, akkor algebrai alakban

$$z = x + \imath y.$$

Ebben az alakban a műveletek egyszerűbben megjegyezhetőek. Ha $z_1 = x_1 + \imath y_1$ és $z_2 = x_2 + \imath y_2$, akkor

$$z_1 + z_2 = (x_1 + \imath y_1) + (x_2 + \imath y_2) = (x_1 + x_2) + \imath(y_1 + y_2);$$

és

$$z_1 z_2 = (x_1 + \imath y_1)(x_2 + \imath y_2) = x_1 x_2 + x_1 \imath y_2 + \imath y_1 x_2 + \overbrace{\imath y_1 \imath y_2}^{\imath^2 y_1 y_2} = \\ = (x_1 x_2 - y_1 y_2) + \imath(x_1 y_2 + y_1 x_2);$$

Egyszerű számolással $z = x + \imath y$ esetén

$$z\bar{z} = (x + \imath y)(x - \imath y) = x^2 + \imath yx - x\imath y - \imath^2 y^2 = x^2 + y^2 = |z|^2.$$

Tétel

$(\mathbb{C}, +, \cdot)$ *test.* *(**??**)*

Bizonyítás vázlat.

- nullelem: $0 = (0,0) = 0 + \imath 0$;
- $z = x + \imath y$ additív inverze: $-z = -x + \imath(-y)$;
- egységelem: $1 = (1,0) = 1 + \imath 0$;
- $z = x + \imath y \neq 0$ multiplikatív inverze:

$$\frac{1}{z} = \frac{\bar{z}}{z\bar{z}} = \frac{\bar{z}}{|z|^2} = \frac{x}{x^2+y^2} + \imath \frac{-y}{x^2+y^2};$$

Az összeadás és szorzás asszociativitása, kommutativitása, és a szorzás összeadásra vonatkozó disztributivitása egyszerű számolás. □

Feladat

Legyen $z_1 = \sqrt{3} + \imath$ és $z_2 = 1 - \imath$!

- $\operatorname{Re} z_1 = ?$
- $\operatorname{Im} z_2 = ?$
- $\sqrt{3} z_1 = ?$
- $\overline{z_1} = ?$
- $z_1 + 2\overline{z_2} = ?$
- $z_1 - z_2 = ?$
- $|z_1| = ?$
- $\arg z_2 = ?$
- $z_1 z_2 = ?$
- $\dfrac{z_1}{z_2} = ?$

CSAK VÁZLAT (PG)

Könnyen beláthatóak a következők.

Tétel (alapműveletek kapcsolata a konjugálttal és az abszolútértékkel)

Ha $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$, akkor

- $$\overline{z_1 \pm z_2} = \overline{z_1} \pm \overline{z_2}, \quad \overline{(z_1 z_2)} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2},$$

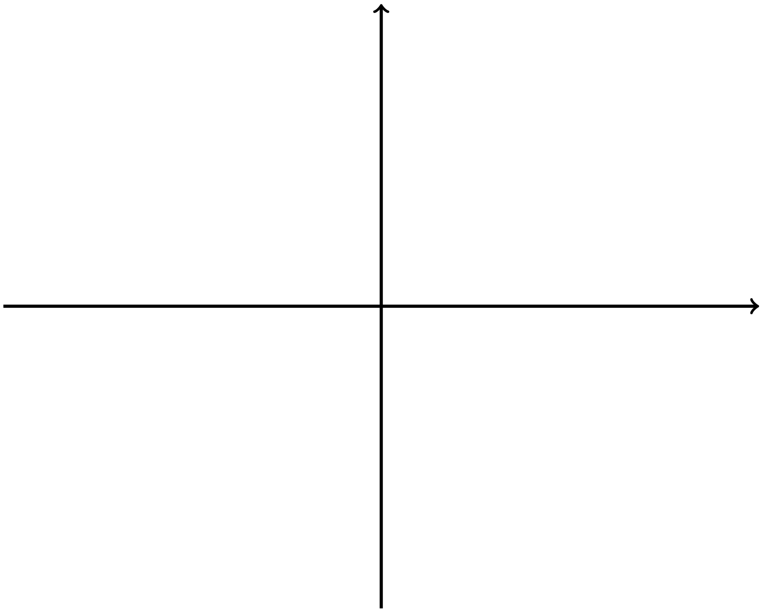
  és ha $z_2 \neq 0$, akkor
  $$\overline{z_1 / z_2} = \overline{z_1} / \overline{z_2}.$$

- $$|z_1| = |\overline{z_1}|, \quad |z_1 z_2| = |z_1||z_2|,$$

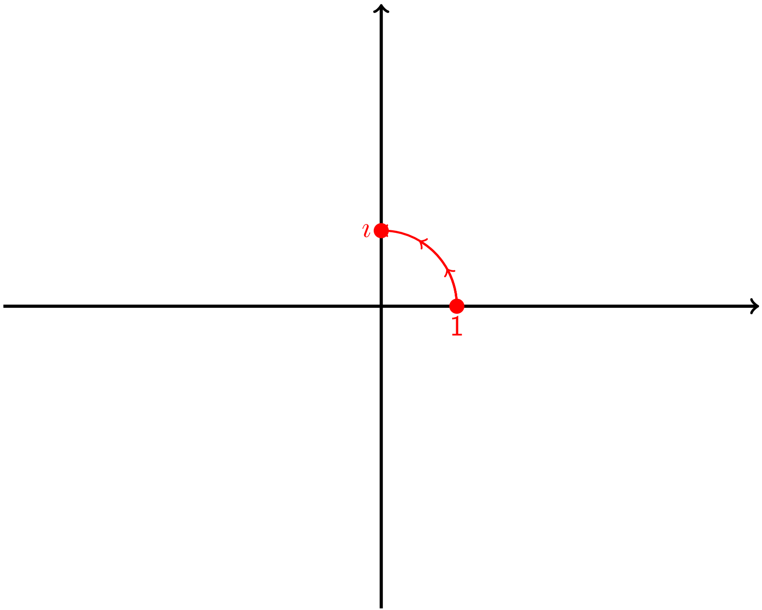
  és ha $z_2 \neq 0$, akkor
  $$|z_1 / z_2| = |z_1| / |z_2|.$$

- *háromszög-egyenlőtlenség* $|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$, *illetve*
  $$|z_1| - |z_2| \leq |z_1 - z_2|, \quad \textit{sőt} \quad \big||z_1| - |z_2|\big| \leq |z_1 - z_2|.$$

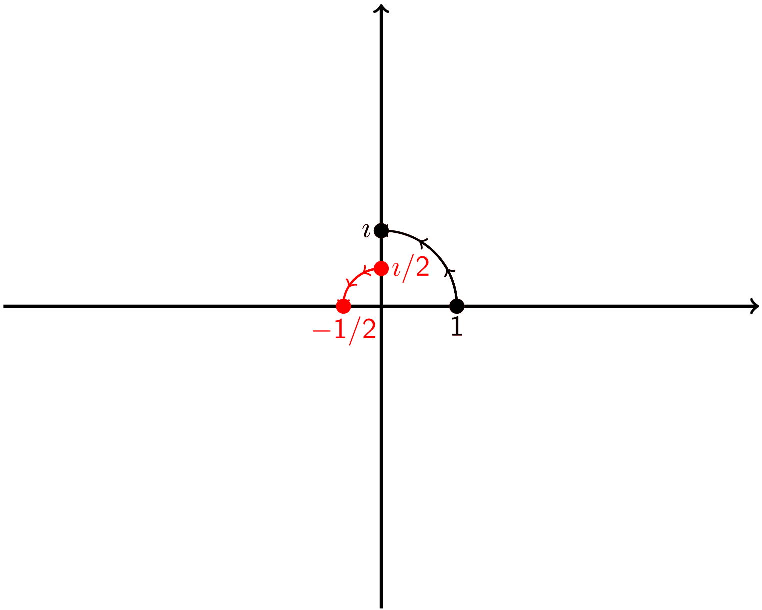
Ha $z = x + y\imath$, akkor $\imath \cdot z = x\imath + y\imath^2 = -y + x\imath$, azaz $z \perp \imath \cdot z$, sőt $\arg(\imath \cdot z) = \arg z + 90^\circ$, és $|\imath \cdot z| = |z|$.



Ha $z = x + y\imath$, akkor $\imath \cdot z = x\imath + y\imath^2 = -y + x\imath$, azaz $z \perp \imath \cdot z$, sőt $\arg(\imath \cdot z) = \arg z + 90^\circ$, és $|\imath \cdot z| = |z|$.

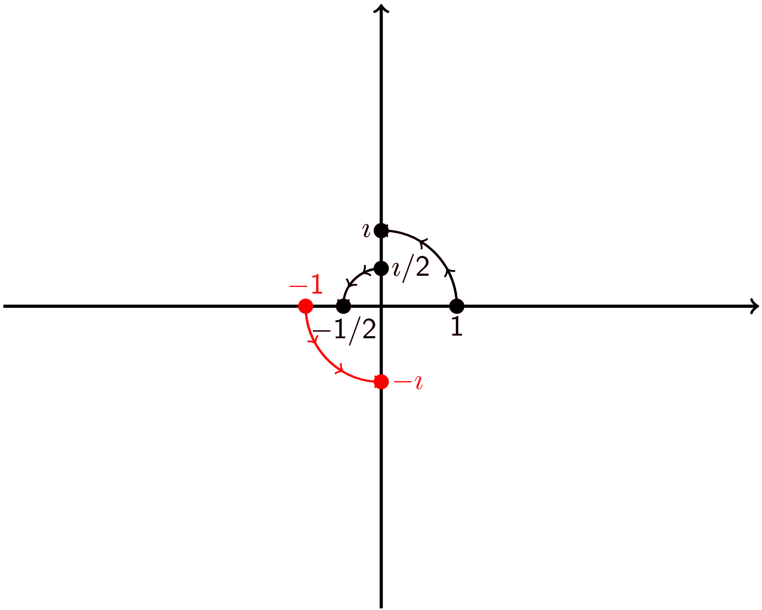


Ha $z = x + y\imath$, akkor $\imath \cdot z = x\imath + y\imath^2 = -y + x\imath$, azaz $z \perp \imath \cdot z$, sőt $\arg(\imath \cdot z) = \arg z + 90°$, és $|\imath \cdot z| = |z|$.

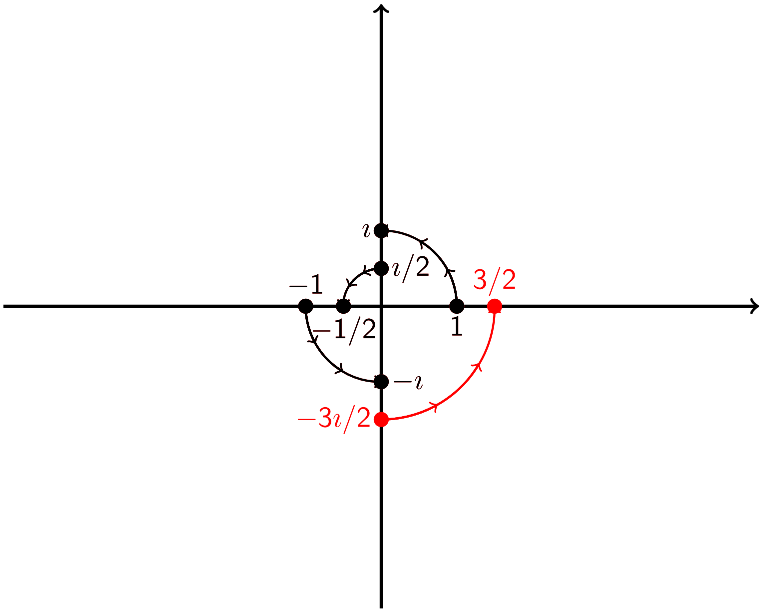


CSAK VÁZLAT (PG)

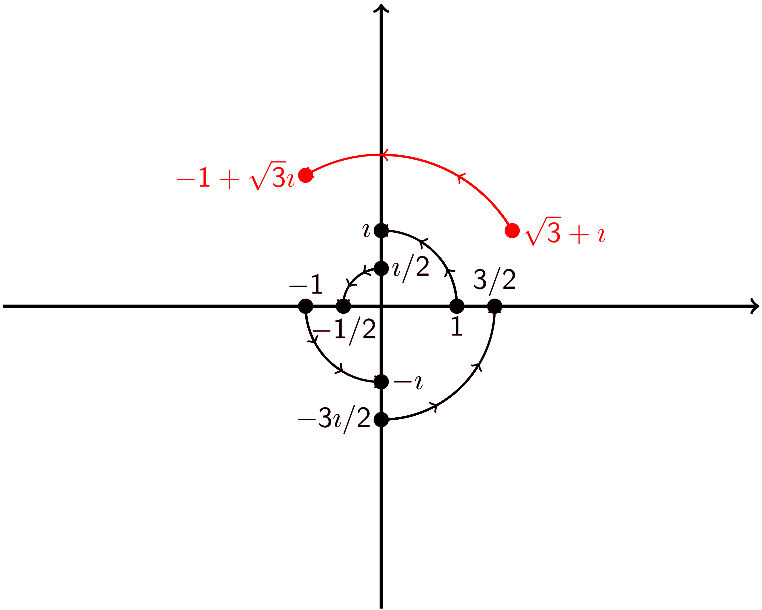
Ha $z = x + y\imath$, akkor $\imath \cdot z = x\imath + y\imath^2 = -y + x\imath$, azaz $z \perp \imath \cdot z$, sőt $\arg(\imath \cdot z) = \arg z + 90°$, és $|\imath \cdot z| = |z|$.



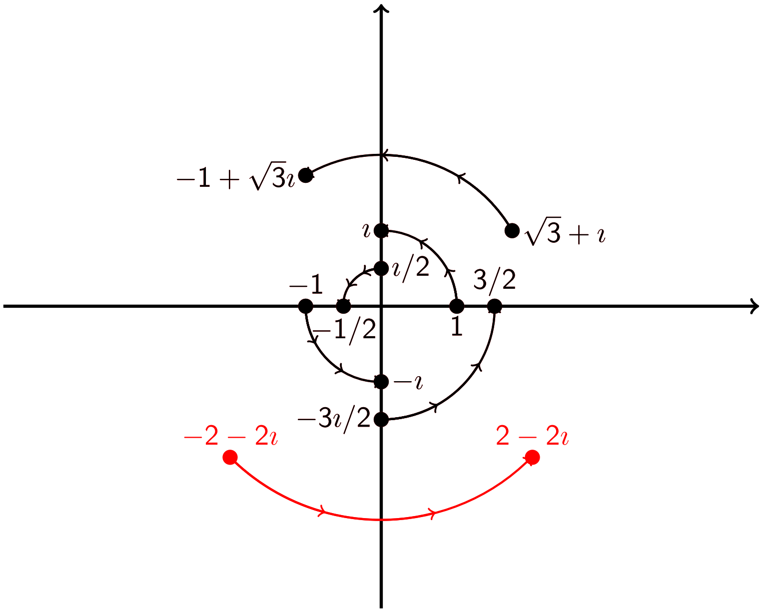
Ha $z = x + y\imath$, akkor $\imath \cdot z = x\imath + y\imath^2 = -y + x\imath$, azaz $z \perp \imath \cdot z$, sőt $\arg(\imath \cdot z) = \arg z + 90^\circ$, és $|\imath \cdot z| = |z|$.



Ha $z = x + y\imath$, akkor $\imath \cdot z = x\imath + y\imath^2 = -y + x\imath$, azaz $z \perp \imath \cdot z$, sőt $\arg(\imath \cdot z) = \arg z + 90°$, és $|\imath \cdot z| = |z|$.

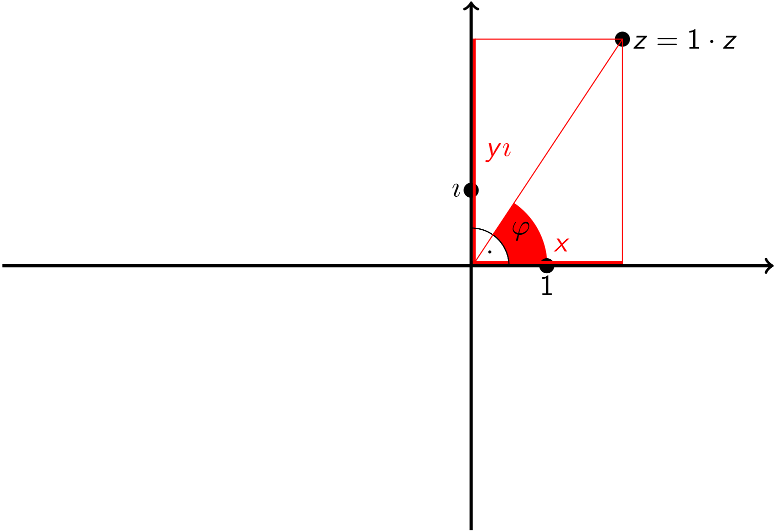


Ha $z = x + y\imath$, akkor $\imath \cdot z = x\imath + y\imath^2 = -y + x\imath$, azaz $z \perp \imath \cdot z$, sőt $\arg(\imath \cdot z) = \arg z + 90°$, és $|\imath \cdot z| = |z|$.



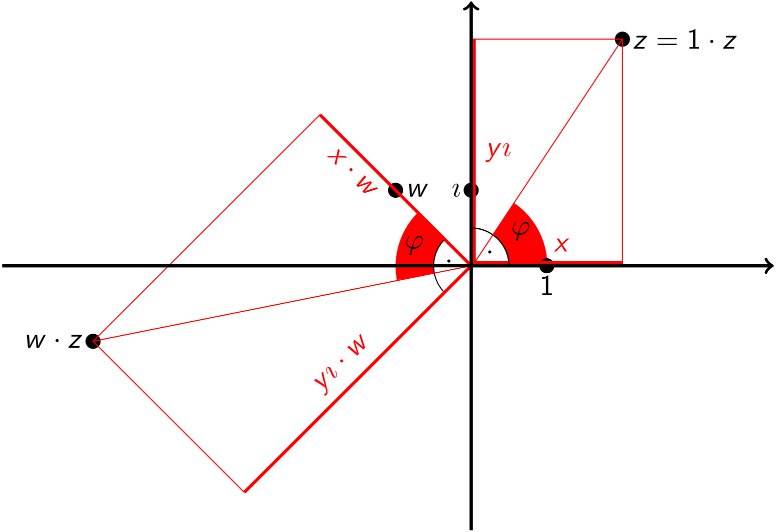
CSAK VÁZLAT (PG)

Legyenek w és $z = x + y\imath$ tetszőleges komplex számok, és legyen $\varphi = \arg z$!



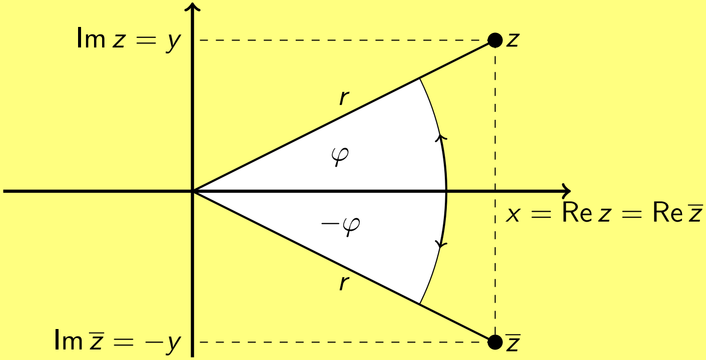
$$|w \cdot z| = |w| \cdot |z| \qquad \text{és} \qquad \arg(w \cdot z) = \arg w + \arg z.$$

Legyenek w és $z = x + y\imath$ tetszőleges komplex számok, és legyen $\varphi = \arg z$!



$$|w \cdot z| = |w| \cdot |z| \qquad \text{és} \qquad \arg(w \cdot z) = \arg w + \arg z.$$

A $z = x + y\imath$ komplex szám esetén legyen $r = |z|$ és $\varphi = \arg z$!



Leolvasható a z komplex szám trigonometriai alakja.

$$z = r(\cos\varphi + \imath\sin\varphi) \qquad \overline{z} = r(\cos -\varphi + \imath\sin -\varphi)$$

Az előzőek szerint

$$r_1(\cos\varphi_1 + \imath\sin\varphi_1)\cdot r_2(\cos\varphi_2 + \imath\sin\varphi_2) =$$
$$= r_1 r_2(\cos(\varphi_1+\varphi_2) + \imath\sin(\varphi_1+\varphi_2)).$$

Innen, ha $r \neq 0 (\iff z \neq 0)$, akkor

$$r(\cos\varphi + \imath\sin\varphi)\cdot\frac{1}{r}(\cos-\varphi + \imath\sin-\varphi) =$$
$$= \frac{r}{r}(\cos(\varphi-\varphi) + \imath\sin(\varphi-\varphi)) = 1,$$

azaz

$$\frac{1}{r(\cos\varphi + \imath\sin\varphi)} = \frac{1}{r}(\cos-\varphi + \imath\sin-\varphi),$$

és így

$$\frac{r_1(\cos\varphi_1 + \imath\sin\varphi_1)}{r_2(\cos\varphi_2 + \imath\sin\varphi_2)} = \frac{r_1}{r_2}(\cos(\varphi_1-\varphi_2) + \imath\sin(\varphi_1-\varphi_2)).$$

Trigonometriai alakban könnyen elvégezhető a hatványozás.

$$[r(\cos\varphi + \imath \sin\varphi)]^n = r^n(\cos n\varphi + \imath \sin n\varphi) \qquad (n \in \mathbb{N}^+)$$

Valójában, ha $r \neq 0$, akkor ez $n \in \mathbb{Z}$ esetén is igaz.
$n \in \mathbb{N}^+$ esetén értelmezzük a komplex n-edik gyökvonást. Ha $z \neq 0$, akkor n különböző olyan $w \in \mathbb{C}$ van, amire $w^n = z$. Ezeket hívjuk a z n-edik komplex gyökeinek.

$$\sqrt[n]{r(\cos\varphi + \imath \sin\varphi)} = \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\varphi + k360^\circ}{n} + \imath \sin\frac{\varphi + k360^\circ}{n}\right)$$
$$(k = 0, \dots, n-1)$$

Összefoglalva.

Tétel (alapműveletek, hatványozás, gyökvonás és konjugálás kapcsolata az argumentummal)

Ha $z_1, z_2, z \in \mathbb{C}$ *és* $n \in \mathbb{N}^+$, *akkor*

- $$\arg(z_1 z_2) = \arg z_1 + \arg z_2,$$

  és ha $z_2 \neq 0$, *akkor*

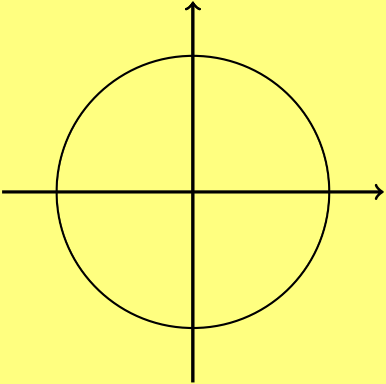
  $$\arg(z_1/z_2) = \arg z_1 - \arg z_2.$$

- $$\arg z^n = n \arg z, \qquad \arg \sqrt[n]{z} = \frac{\arg z + k360^\circ}{n}.$$

- $$\arg \overline{z} = -\arg z$$

Mint minden 0-tól különböző komplex számnak, az 1-nek is n különböző n-edik gyöke van. Ezeket hívjuk n-edik komplex egységgyököknek.

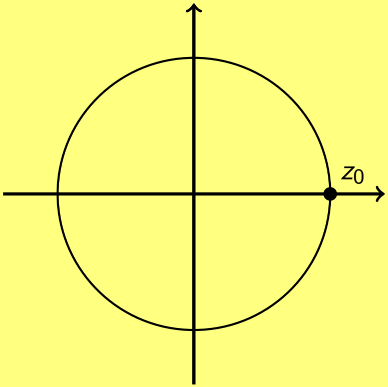
$$\sqrt[n]{1} = z_k = \cos\frac{k360^\circ}{n} + \imath \sin\frac{k360^\circ}{n} \qquad (k = 0, \ldots, n-1)$$



Mint minden 0-tól különböző komplex számnak, az 1-nek is n különböző n-edik gyöke van. Ezeket hívjuk n-edik komplex egységgyököknek.

$$\sqrt[n]{1} = z_k = \cos\frac{k360^\circ}{n} + \imath\sin\frac{k360^\circ}{n} \qquad (k = 0, \ldots, n-1)$$

$n = 1$:
$\sqrt[1]{1} = \cos 0 \cdot 360^\circ + \imath \sin 0 \cdot 360^\circ$
$z_0 = 1$

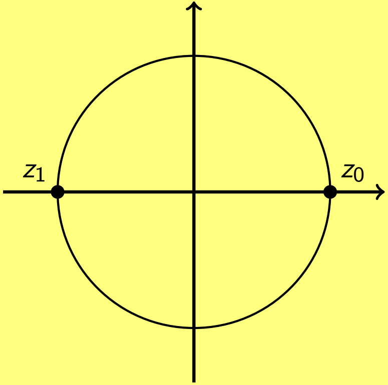


CSAK VÁZLAT (PG)

Mint minden 0-tól különböző komplex számnak, az 1-nek is n különböző n-edik gyöke van. Ezeket hívjuk n-edik komplex egységgyököknek.

$$\sqrt[n]{1} = z_k = \cos\frac{k360^\circ}{n} + \imath\sin\frac{k360^\circ}{n} \qquad (k = 0, \ldots, n-1)$$

$n = 2$:
$\sqrt{1} = \cos k180^\circ + \imath \sin k180^\circ$
$z_{0,1} = \pm 1$

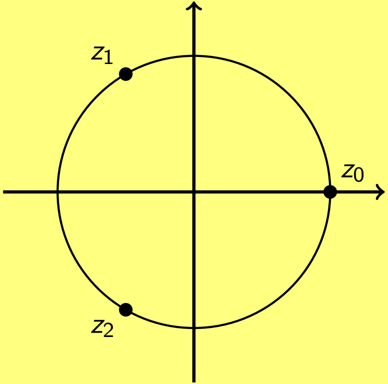


CSAK VÁZLAT (PG)

Mint minden 0-tól különböző komplex számnak, az 1-nek is n különböző n-edik gyöke van. Ezeket hívjuk n-edik komplex egységgyököknek.

$$\sqrt[n]{1} = z_k = \cos\frac{k360^\circ}{n} + \imath\sin\frac{k360^\circ}{n} \qquad (k = 0, \ldots, n-1)$$

$n = 3$:
$\sqrt[3]{1} = \cos k120^\circ + \imath \sin k120^\circ$
$z_0 = 1$,
$z_{1,2} = -\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2}\imath$

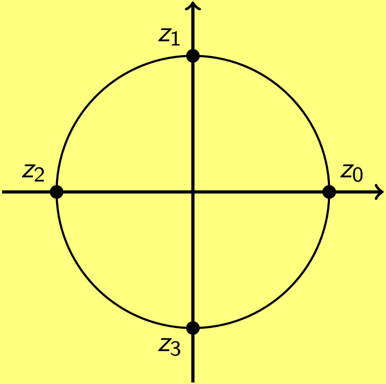


CSAK VÁZLAT (PG)

Mint minden 0-tól különböző komplex számnak, az 1-nek is n különböző n-edik gyöke van. Ezeket hívjuk n-edik komplex egységgyököknek.

$$\sqrt[n]{1} = z_k = \cos\frac{k360^\circ}{n} + \imath\sin\frac{k360^\circ}{n} \qquad (k = 0, \ldots, n-1)$$

$n = 4$:
$\sqrt[4]{1} = \cos k90^\circ + \imath\sin k90^\circ$
$z_{0,2} = \pm 1$,
$z_{1,3} = \pm\imath$



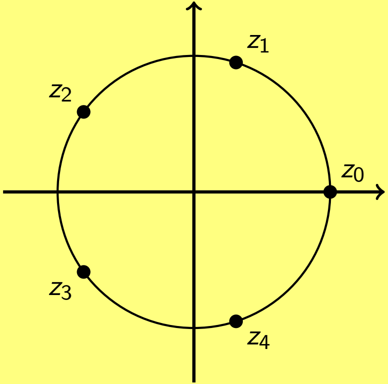
Mint minden 0-tól különböző komplex számnak, az 1-nek is n különböző n-edik gyöke van. Ezeket hívjuk n-edik komplex egységgyököknek.

$$\sqrt[n]{1} = z_k = \cos\frac{k360^\circ}{n} + \imath\sin\frac{k360^\circ}{n} \qquad (k = 0, \dots, n-1)$$

$n = 5$:
$\sqrt[5]{1} = \cos k72^\circ + \imath \sin k72^\circ$
$z_0 = 1,$

$$z_{1,4} = \frac{\sqrt{5}-1}{4} \pm \sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{8}}\,\imath,$$

$$z_{2,3} = -\frac{1+\sqrt{5}}{4} \pm \sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{8}}$$

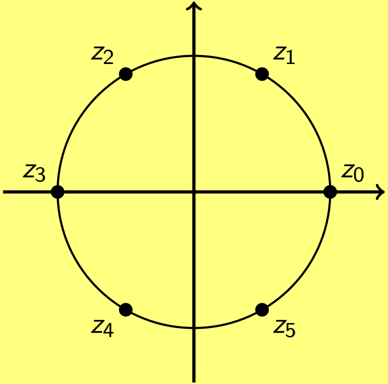


CSAK VÁZLAT (PG)

Mint minden 0-tól különböző komplex számnak, az 1-nek is n különböző n-edik gyöke van. Ezeket hívjuk n-edik komplex egységgyököknek.

$$\sqrt[n]{1} = z_k = \cos\frac{k360^\circ}{n} + \imath \sin\frac{k360^\circ}{n} \qquad (k = 0, \ldots, n-1)$$

$n = 6$:
$\sqrt[6]{1} = \cos k60^\circ + \imath \sin k60^\circ$
$z_{0,3} = \pm 1,$
$z_{1,2,4,5} = \pm\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2}\imath$

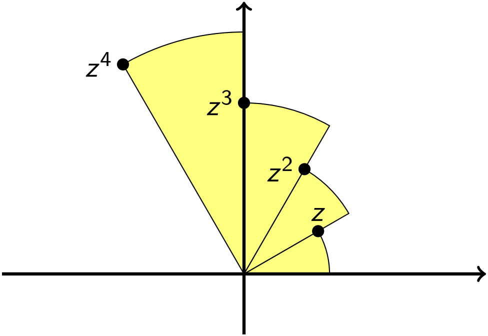


CSAK VÁZLAT (PG)

Feladat

Legyen $z = \dfrac{\sqrt{6} + \sqrt{2}\imath}{2}$!

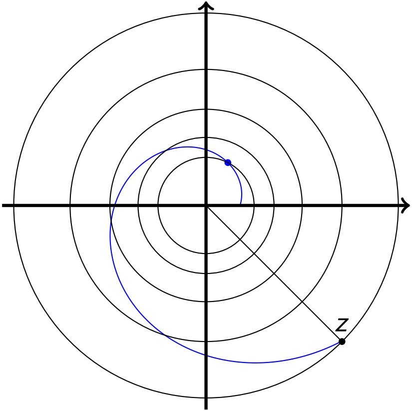
$z^4 =?$



Feladat

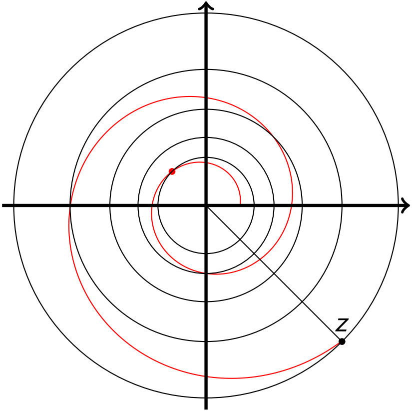
Legyen $z = 4 - 4\imath$!

$\sqrt[5]{z} = ?$



Feladat

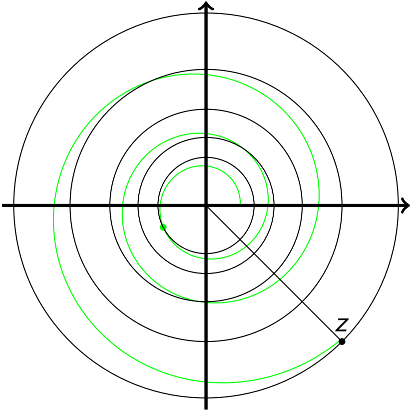
Legyen $z = 4 - 4\imath$!
$\sqrt[5]{z} = ?$



CSAK VÁZLAT (PG)

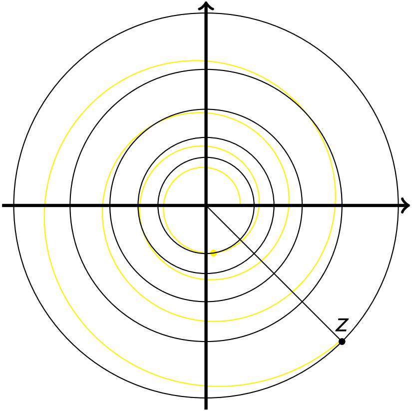
Feladat

Legyen $z = 4 - 4\imath$!
$\sqrt[5]{z} = ?$



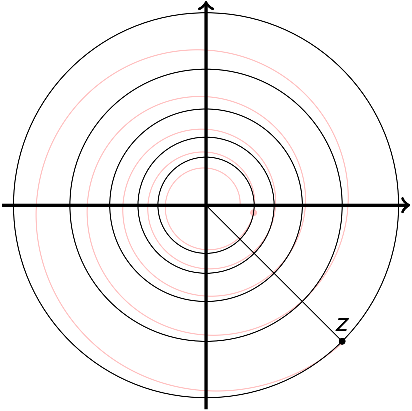
Feladat

Legyen $z = 4 - 4\imath$!
$\sqrt[5]{z} =?$



Feladat

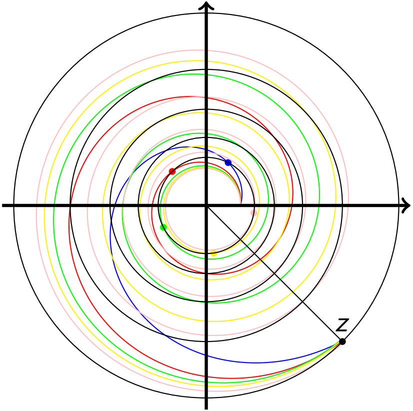
Legyen $z = 4 - 4\imath$!
$\sqrt[5]{z} =?$



CSAK VÁZLAT (PG)

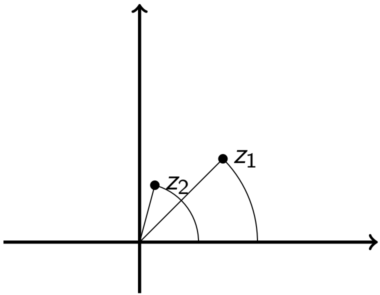
Feladat

Legyen $z = 4 - 4\imath$!
$\sqrt[5]{z} = ?$



Feladat

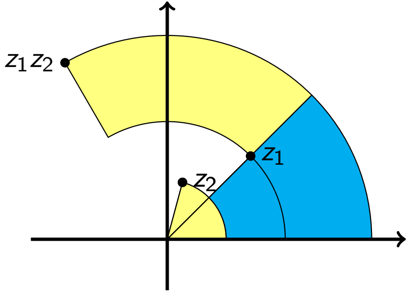
Legyen
$z_1 = 2\sqrt{3}(\cos 45^\circ + \imath \sin 45^\circ)$ és
$z_2 = \sqrt{3}(\cos 75^\circ + \imath \sin 75^\circ)$!
Adjuk meg $z_1 z_2$ és $\dfrac{z_1}{z_2}$ algebrai alakját!



CSAK VÁZLAT (PG)

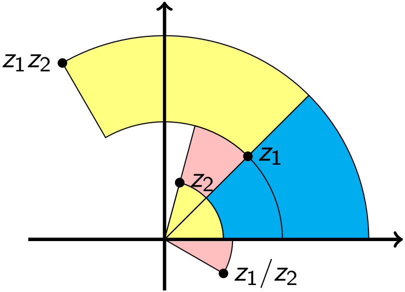
Feladat

Legyen
$z_1 = 2\sqrt{3}(\cos 45^\circ + \imath \sin 45^\circ)$ és
$z_2 = \sqrt{3}(\cos 75^\circ + \imath \sin 75^\circ)$!
Adjuk meg $z_1 z_2$ és $\dfrac{z_1}{z_2}$ algebrai alakját!



Feladat

Legyen
$z_1 = 2\sqrt{3}(\cos 45^\circ + \imath \sin 45^\circ)$ és
$z_2 = \sqrt{3}(\cos 75^\circ + \imath \sin 75^\circ)$!
Adjuk meg $z_1 z_2$ és $\dfrac{z_1}{z_2}$ algebrai alakját!



Polinom, azaz racionális egész függvény

Definíció

Ha $k \in \mathbb{N}^+$, és $a_0, a_1, \ldots, a_k \in \mathbb{C}$ úgy, hogy $a_k \neq 0$, akkor a

$$p(z) = a_k z^k + \cdots + a_1 z + a_0$$

függvényt k-adfokú (komplex együtthatós) polinomnak nevezzük, míg $a_0, a_1, \ldots, a_k$-t a polinom együtthatóinak, a_k-t a főegyütthatónak hívjuk.
Ha nem tesszük fel, hogy $a_k \neq 0$, akkor legfeljebb k-adfokú polinomról beszélünk.
A konstans függvényeket 0-adfokú polinomnak nevezzük.
Polinomnak vagy racionális egész függvénynek nevezünk egy függvényt, ha k-adfokú polinom valamely $k \in \mathbb{N}_0$ esetén.
A $p(z)$ polinom gyökének nevezzük a zérushelyeit, azaz azon $z \in \mathbb{C}$ számokat, melyekre $p(z) = 0$.
A $p(z)$ k-adfokú polinom fokszámát $\deg p(z)$-vel jelöljük, azaz

$$\deg p(z) = k.$$

Bizonyítás nélkül közöljük a következőket.

Tétel (Algebra alaptétele)

Egy $p(z)$ legalább elsőfokú, komplex együtthatós polinomnak mindig van komplex gyöke.

Következmény

Egy $p(z)$ k-adfokú (nem azonosan nulla) polinomnak pontosan k darab gyöke van, multiplicitással számolva, azaz létezik $z_1, z_2, \ldots, z_k \in \mathbb{C}$ úgy, hogy

$$p(z) = a_k(z - z_1)(z - z_2)\ldots(z - z_k),$$

ahol a_k a polinom főegyütthatója.

Megjegyzés

A gyökök nem feltétlenül különbözőek.

Feladat

Határozzuk meg a $p(z)$ polinom gyökeit, ahol

$$p(z) = z^2 - (2 + 4\imath)z - 3 + 2\imath.$$