IMSC feladatok

Weiner Mihály, Tasnádi Tamás, Kroó András,
Markó Zoltán, Bodrogné Réffy Júlia

2019. szeptember 24.

Tartalomjegyzék

1. Komplex számok

1.1 Feladat.

$$\sum_{k=0}^{10} 2^k \cos\left(k\frac{\pi}{6}\right) =?$$

1.2 Definíció. A *Riemann-gömb* komplex számsík egyetlen, „végtelen távoli ponttal” való kiegészítése, azaz a $\bar{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \infty$ halmaz, a

$$\begin{array}{lll} z + \infty = \infty, & \dfrac{z}{\infty} = 0 & \forall z \in \mathbb{C}, \\ z \cdot \infty = \infty, & \dfrac{z}{0} = \infty & \forall z \in \bar{\mathbb{C}} \setminus \{0\} \end{array}$$

műveletekkel. A $\infty \pm \infty$, $\frac{\infty}{\infty}$, $0 \cdot \infty$ és $\frac{0}{0}$ formulák nem definiáltak.

1.3 Definíció. A $z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}$ számok *osztóviszonya*:

$$(z_1, z_2, z_3) := \frac{z_3 - z_1}{z_2 - z_3} = -\frac{z_1 - z_3}{z_2 - z_3},$$

a $z_1, z_2, z_3, z_4 \in \mathbb{C}$ számok *kettősviszonya*:

$$(z_1, z_2, z_3, z_4) := \frac{(z_1, z_2, z_3)}{(z_1, z_2, z_4)}.$$

1.4 Feladat. Igazoljuk, hogy négy pont pontosan akkor esik egy körre vagy egyenesre, ha a négy pont kettősviszonya valós.

1.5 Feladat. Igazoljuk, hogy a $z \mapsto 1/z$, $z \mapsto z + w$, $z \mapsto \lambda z$ valamint a $z \mapsto \frac{az+b}{cz+d}$ leképezések $(ad - bc \neq 0)$ kör- illetve egyenestartók!

1.6 Feladat. Milyen ponthalmazt alkotnak a komplex számsíkon azon z számok, melyekre $\left|\frac{z-1}{z+\mathrm{i}}\right| = 2$ teljesül?

1.7 Feladat. Bizonyítsuk be, hogy egy szabályos n-szög középpontjából a csúcsaiba mutató helyvektorok összege nullvektor!

1.8 Feladat. Egy négyszög oldalaira kifelé négyzeteket rajzolunk. Kössük össze az átellenes négyzetek középpontjait. Igazoljuk, hogy e két szakasz merőleges, és egyenlő hosszú!

1.9 Feladat. Rajzoljunk egy háromszög mindegyik oldalára kifelé egy-egy szabályos háromszöget. Igazoljuk, hogy ezek középpontjai szabályos háromszöget alkotnak!

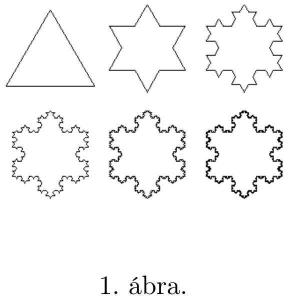
1.10 Feladat. Tekintsük az

$$i)\quad \frac{1+\mathrm{i}}{(z+\mathrm{i})^3} = \left(\bar{z} - \mathrm{i}\right)^3 \qquad\qquad ii)\quad \left(\bar{z}+1\right)^7 = \frac{1}{\bar{z}^7} - \mathrm{i}$$

egyenleteket! Van-e olyan $z \in \mathbb{C}$, amely kielégíti az i), illetve van-e olyan, ami kielégíti a ii) egyenletet? Konkrét megoldásokra most nem vagyunk kiváncsiak, de az egyszerű „igen/nem"-en túl mindkét esetben érveljünk is a válaszunk mellett!

1.11 Feladat. *a*) Írja föl azt az $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ transzformációt, ami a komplex számsíkon az origó körül 60°-kal forgat pozitív irányban!
b) Írja föl azt a $g : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ transzformációt, ami a komplex számsíkon az 1 pont körül 60°-kal forgat negatív irányban!
c) Írja föl a $\mathbb{C} \ni z \mapsto f(g(z))$ transzformációt! Mi ennek a transzformációnak a geometriai jelentése?

2. Sorozatok határértéke



1. ábra.

2.1 Feladat. Az ún. *Koch-féle hópelyhet* a következőképpen kapjuk: kiindulunk egy $a > 0$ oldalhosszúságú szabályos háromszögből, majd e háromszög minden oldalának középső harmadára $\frac{a}{3}$ oldalhosszúságú szabályos háromszöget szerkesztünk (kifelé). Az így kapott síkidom minden oldalának középső harmadára ismét harmadakkora oldalú szabályos háromszögeket szerkesztünk kifelé, mint amekkora az új síkidom oldala volt, majd ezt az eljárást ismételjük a végtelenségig (lásd az 1. ábrát). Határozzuk meg a kapott síkidom kerületét és területét!

2.2 Feladat. Tekintsük a

$$b_n = \frac{n+666}{(2n-3)^4}, \qquad c_n = \left(\sqrt{n^2+2n} - n\right)\left(1 + \frac{\cos(n)}{1+0.0001n}\right)$$

képlettel definiált sorozatokat. Döntsük el, hogy létezik-e, és ha igen, számoljuk ki a határértéküket majd válaszoljunk a következő kérdésekre:

a) Igaz-e, hogy véges sok (n, m) pártól eltekintve $b_n < c_m$?

b) Létezik-e olyan n, hogy $b_n < c_m$ minden m értékre?

A választ mindkét kérdésre precíz érveléssel indokoljuk!

2.3 Feladat.

a) Van-e az $a_n = \frac{1}{n}$ sorozatnak legkisebb eleme?

b) Van-e a $b_n = \frac{\cos(n)}{1+0.0001n}$ sorozatnak legkisebb eleme?

Válaszunkat indokoljuk! A legkisebb elemet *nem kell megadni*!

2.4 Definíció. Az $R \in (0, 4]$ paraméterhez tartozó *Logisztikus leképezésnek* nevezzük az

$$f_R : [0, 1] \to [0, 1], \qquad x \mapsto f_R(x) = Rx(1-x)$$

leképezést.

2.5 Feladat. Vizsgáljuk meg *numerikusan* a fent definiált f_R logisztikus leképezéssel megadott

$$a_1 \in (0, 1), \qquad a_{n+1} = f_R(a_n) = Ra_n(1-a_n)$$

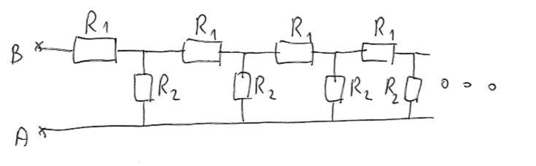
rekurzív sorozat aszimptotikus viselkedését az $R \in (0, 4]$ paraméter különböző értékei mellett!

2.6 Feladat. Határozzuk meg a 2. ábrán látható végtelen ellenállásánc eredő ellenállását az A és B kivezetések között!

2.7 Feladat. Igazoljuk, hogy minden valós számsorozatnak van valós, vagy $\pm\infty$ torlódási pontja!

2.8 Feladat. Létezik-e olyan valós számsorozat, melynek valós torlódási pontjai

a) az egész számok;



2. ábra.

b) a racionális számok;

c) az $\left\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3} \dots\right\}$ halmaz pontjai;

d) az $\left\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3} \dots\right\} \cup \{0\}$ halmaz pontjai;

e) egy tetszőlegesen megadott $Z \subset \mathbb{R}$ zárt halmaz pontjai?

Ha a válaszunk „igen", akkor konstruáljunk is meg egy, a feltételeknek megfelelő sorozatot!

2.9 Feladat. Határozzuk meg az ω valós paraméter tetszőleges értékére az

$$a) \quad a_n = \{\omega n\}, \qquad\qquad b) \quad b_n = \cos(\omega n)$$

sorozatok torlódási pontjait, limesz szuperiorját és limesz inferiorját! (Az a) kérdésben $\{x\}$ az x szám *törtrészét* jelöli.)

2.10 Feladat. Minden $n \in \mathbb{N}$ esetén definiáljuk az a_n értékét úgy, hogy az n index tizes számrendszerben felírt alakja elé teszünk egy tizedesvesszőt, az elé pedig egy nulla számjegyet, és az így kapott számot a tizes számrendszerben értelmezzük. Tehát például $a_{4523} = 0{,}4523$ és $a_{100} = 0{,}100$. Mik az a_n sorozat torlódási pontjai?

2.11 Feladat. Tetszőleges $r > 0$-ra adjon példát olyan $a_n \to +0$, $b_n \to 0$ sorozatokra, melyekre

$$a_n^{b_n} \xrightarrow{n\to\infty} r.$$

2.12 Feladat. Tekintsük a következő sorozatot:

$$\frac{0}{1}, \quad \frac{0}{2}, \frac{1}{2}, \quad \frac{0}{3}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \quad \frac{0}{4}, \frac{1}{4}, \frac{2}{4}, \frac{3}{4}, \quad \dots \quad \frac{0}{n}, \frac{1}{n}, \frac{2}{n} \dots \frac{n-1}{n}, \quad \frac{0}{n+1}, \frac{1}{n+1}, \dots$$

a) Torlódási pontja-e a 0 a sorozatnak?
b) Torlódási pontja-e az 1 a sorozatnak?
c) Konvergens-e a sorozat?
d) Pontosan mely valós számok a sorozat torlódási pontjai?
Válaszait indokolja is meg!

2.13 Feladat. Jelölje $\overline{\mathbb{R}}$ az $\mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ halmazt!

a) Definiálja egy $A \subset \mathbb{R}$ halmaz *torlódási pontjait*!

b) Jelölje $\operatorname{Acc} A \subset \overline{\mathbb{R}}$ az $A \subset \mathbb{R}$ halmaz torlódási pontjainak halmazát! (Accumulation point.) Döntse el a következő állításokról, hogy igazak-e vagy nem! Ítéleteit igazolja!

i) $\forall A \subset \mathbb{R}$ esetén $\operatorname{Acc} A \subset A$. *ii)* $\forall A \subset \mathbb{R}$ esetén $A \subset \operatorname{Acc} A$.
iii) $\exists A \subset \mathbb{R}$: $A \neq \emptyset$ és $\operatorname{Acc} A = \emptyset$. *iv)* $\exists A \subset \mathbb{R}$: $|A| = \infty$ és $\operatorname{Acc} A = \emptyset$.

3. Függvények határértéke, folytonossága

3.1 Feladat. Jelölje $\operatorname{Torl}(A)$ az $A \subset \mathbb{R}$ halmaz torlódási pontjainak halmazát! Igaz-e, hogy

a) $\operatorname{Torl}(A) \subset A$; *b)* $\operatorname{Torl}\big(\operatorname{Torl}(A)\big) \subset \operatorname{Torl}(A)$?

Válaszunkat indokoljuk!

3.2 Feladat. Vizsgáljuk meg tetszőleges $x \in \mathbb{R}$ pontban határérték, folytonosság szempontjából a

$$\chi_{\mathbb{Q}}(x) = \begin{cases} 1, & \text{ha } x \in \mathbb{Q} \\ 0, & \text{ha } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$$

formulával definiált *Dirichlet-függvényt*!

3.3 Feladat. Vizsgáljuk meg tetszőleges $x \in \mathbb{R}$ pontban határérték, folytonosság szempontjából a következő függvényeket!

$$f(x) = \begin{cases} x, & \text{ha } x \in \mathbb{Q} \\ x^2, & \text{ha } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases} \qquad g(x) = \begin{cases} \frac{1}{q}, & \text{ha } x = \frac{p}{q} \in \mathbb{Q} \\ 0, & \text{ha } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$$

$$h(x) = \begin{cases} q, & \text{ha } x = \frac{p}{q} \in \mathbb{Q} \\ 0, & \text{ha } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases} \qquad j(x) = \begin{cases} \frac{1}{p}, & \text{ha } x = \frac{p}{q} \in \mathbb{Q} \setminus \{0\} \\ 0, & \text{ha } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \\ 1, & \text{ha } x = 0 \end{cases}$$

A fenti formulákban $\mathbb{Q} \ni x = \frac{p}{q}$ esetén feltesszük, hogy p egész, q pozitív egész, és p, q relatív prímek, tehát a $\frac{p}{q}$ tört nem egyszerűsíthető.

3.4 Feladat. Vizsgáljuk meg, hogy a következő függvények az adott intervallumon egyeneltesen folytonosak-e! Egyenletes folytonosság esetén adjunk meg minden $\varepsilon > 0$ értékhez egy olyan $\delta(\varepsilon) > 0$ értéket, amelynél közelebbi pontok képének távolsága kisebb, mint ε az intervallumon! Ha nem áll fenn egyenletes folytonosság, bizonyítsuk be!

a)	$f(x) = \dfrac{1}{x}$,	$I_1 = (0, \infty)$;
b)	$f(x) = \dfrac{1}{x}$,	$I_2 = [1, \infty)$;
c)	$g(x) = \sqrt{x}$,	$I_0 = [0, \infty)$;
d)	$g(x) = \sqrt{x}$,	$I_1 = (0, \infty)$;
e)	$g(x) = \sqrt{x}$,	$I_2 = [1, \infty)$;
f)	$h(x) = x^2$,	$I_0 = [0, \infty)$;
g)	$h(x) = x^2$,	$I_3 = [0, 1]$.

3.5 Feladat. Egy drótkarikát egyes pontokban felmelegítünk, más pontokban lehűtünk, így a karika hőmérséklete a drót mentén folytonosan változik. Igaz-e, hogy minden esetben található két átmérő mentén átellenes pont a karikán, amelyekben a drót hőmérséklete azonos? Állítását bizonyítsa be!

4. Differenciálás

4.1 Feladat. Hány érintőt lehet húzni a $(3,4)$ koordinátájú pontból az $y = x - \frac{1}{x}$ képlettel megadott görbéhez? Határozzuk meg az érintési pontok koordinátáit!

4.2 Feladat. A sík egy pontjából érintőket húzunk az $y = x^2$ parabolához. Az érintési pontok: $(1,1)$ és $(3,9)$. Határozzuk meg a kérdéses pont koordinátáit!

4.3 Feladat. A $(0,3)$ pontból érintőt húzunk az $y = x^4 - 6x^2$ görbe $x > 0$ tartományba eső részéhez. Határozzuk meg az érintési pont koordinátáit!

4.4 Feladat. Az $y^3 - x^3 + 3y - x = 1$ görbéhez érintőt húzunk a $(0,0)$ pontból. Mutassuk meg: az érintési pont rajta lesz az $6y - 2x = 3$ egyenesen.

4.5 Feladat. Igazoljuk analitikusan, hogy a forgásparaboloid alakú tükör a tengelyével párhuzamosan érkező fénysugarakat egy pontban fókuszálja! Adjuk meg a fókuszpont koordinátáit, ha a tükör egy síkmetszetét az $y = px^2$ parabola definiálja $(p > 0)$!

4.6 Feladat. Ideális gázzal olyan folyamatot végzünk, amelynek grafikonja a $p - V$ (nyomás–térfogat) síkon egyenes, melynek vízszintes illetve függőleges tengelymetszete $V_0 > 0$ és $p_0 > 0$. A folyamat során melyik (V_1, p_1) pontban maximális a gáz hőmérséklete? A folyamat során melyik (V_2, p_2) pontban maximális a gáz entrópiája?

Az ideális gáz állapotegyenlete $pV = nRT$, ahol n a mólszám, R az univerzális gázállandó, és T a gáz (abszolút) hőmérséklete. A gáz entrópiája a $pV^\kappa =$ konstans egyenletű *adiabaták* mentén állandó. Itt egyatomos gáz esetén $\kappa = \frac{5}{3}$, míg kétatomos gáz esetén $\kappa = \frac{7}{5}$.

4.7 Feladat. Az ideális gáz állapotegyenleténél pontosabban írja le valódi gázok viselkedését a

$$\left(p + \frac{n^2 a}{V^2}\right)(V - nb) = nRT$$

van der Waals állapotegyenlet, ahol p, V, T, n rendre a gáz nyomását, térfogatát, hőmérsékletét és mólszámát jelöli, R az univerzális gázállandó, $b > 0$ a gázrészecskék térfogatával kapcsolatos konstans, $a > 0$ pedig a gázrészecskék közti vonzó kölcsönhatással kapcsolatos konstans. A van der Waals egyenlet számot ad a folyadék-gáz fázisátalakulásról is; ezzel kapcsolatos, hogy alacsony hőmérsékleten az izotermák egyes szakaszai instabilak, pozitív meredekségűek a $p - V$ síkon.

a) Vázoljuk a van der Waals gáz izotermáit különböző hőmérsékletek mellett a $p - V$ síkon!

b) Határozzuk meg azt a T_c *kritikus hőmérsékletet*, amely alatt az izotermákban fellépnek pozitív meredekségű, instabil szakaszok a $p - V$ síkon!

c) Határozzuk meg a kritikus izotermának azt a p_c, V_c pontját, amelyben az izoterma érintője vízszintes a $p - V$ síkon!

(A T_c, p_c, V_c paraméterek adják meg a gáz *kritikus pontját.*)

4.8 Feladat. Számológép segítsége nélkül döntsük el, mi a nagyobb: $\mathrm{e}^{-\frac{3}{4}} \sin\left(\frac{3}{4}\right)$ vagy $\mathrm{e}^{-\frac{5}{7}} \sin\left(\frac{5}{7}\right)$?

4.9 Feladat. Legyen $f(x) = \cos(x) + 2$ és a, b két (különböző) 3 és 4 közötti szám! Eldönthető-e ennyi információból, mi a nagyobb (és ha igen, mi a válasz): $f(a)$ eés $f(b)$ mértani közepe, vagy f értéke a és b számtani közepénél? (Tehát $\sqrt{f(a)f(b)}$ és $f\left(\frac{a+b}{2}\right)$ között kell eldönteni a nagysági viszonyt.) *Segítség: használjunk logaritmust!*

4.10 Feladat. Négyzet alapterületű ládát készítünk. A láda fölül nyitott lesz (tehát csak 5 oldalfalat kell készíteni). Azt szeretnék, hogy a láda térfogata minél nagyobb legyen; viszont csak 2 négyzetméterre elég felületkezelő anyag áll a rendelkezésünkre (és a láda minden falát kivül-belül le akarjuk kezelni). Mik a láda optimális méretei?

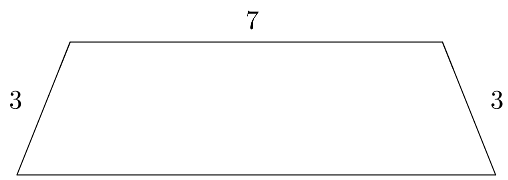
4.11 Feladat. Egy R sugarú gömbbe egyenes körhengereket írunk. Adjuk meg a maximális térfogatú körhenger h magasságát (R arányában)!

4.12 Feladat. Egy $3\,\mathrm{dm} \times 4\,\mathrm{dm}$-es téglalap alakú lemez mindegyik sarkából levágunk egy-egy ugyanakkora négyzetet, majd a maradék lemez oldalán felhajtjuk a téglalapokat úgy, hogy egy felül nyitott, téglatest alakú tartályt tudjunk hegeszteni belőle. Mekkora négyzeteket kell kivágnunk kezdetben, hogy az elkészült tartály a lehető legnagyobb térfogatú legyen? Adjuk meg ezt a maximális térfogatot!

4.13 Feladat. Határozzuk meg az $a_n = \frac{n^2}{n^3+100}$ képlettel megadott sorozat legnagyobb elemét!

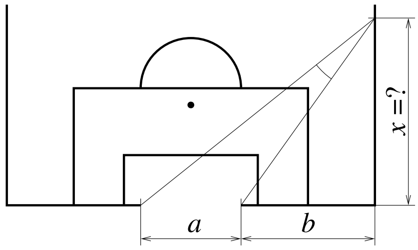
4.14 Feladat. Az egyik éjszaka, kissé emelkedett hangulatban eldöntjük, hogy legjobb lesz egy kis terecske kövére végigheverni, és onnan fölfele bámulni. Hova feküdjünk, ha azt akarjuk, hogy fejünket keletről nyugatra forgatva a lehető legnagyobb szögben az eget lássuk? (Illetve hová, ha a lehető legkisebb szögben akarjuk ugyanezt?) A tér keleti oldalán a házak 10, a nyugati oldalán a házak 20 méter magasak; a tér kelet-nyugat irányban 70 méter széles.

4.15 Feladat. Egy trapéz ábra szerinti három oldalhosszát ismerjük, de az alaplapjáét nem:



Legföljebb mekkora lehet a trapéz területe?

4.16 Feladat.
Honnan (az alapvonaltól mekkora x távolságról) kell kapura lőnie a labdarúgópálya szélén lévő játékosnak, hogy a kapu eltalálása a legkönnyebb legyen, vagyis ahonnan legnagyobb szögben látja a gólvonalat? A gólvonal szélessége a, távolsága az oldalvonaltól b.



4.17 Feladat. Egy jó magas, függőleges várfalon, a földtől vett 8 méter magasságban 1 méter széles palló fut körbe. Úgy akarunk a földről egyenes létrát támasztani a várfalnak, hogy az a palló széléhez és a várfalnak a palló fölé eső részéhez is támaszkodjon. Legalább milyen hosszú létra kell ehhez?

4.18 Feladat. Van két (különböző) 3-nál nagyobb számunk. Eldönthető-e ennyi információból, hogy mi a nagyobb (és ha igen, mi a válasz): a két szám logaritmus-négyzetének átlaga, vagy az átlaguk logaritmusának négyzete? (Logaritmus alatt itt az e-alapú logaritmust értjük.)

4.19 Feladat.

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}-} \sin(x)^{\tan(x)} = ?$$

Segitség: gondolkozzunk el, hogyan lehetne itt a L'Hopital-szabályt használni!

4.20 Feladat. Számológép segítsége nélkül, az $f(x) = x - e\ln(x)$ képlettel definiált f függvény tanulmányozásával mutassuk meg, hogy

$$e^3 > 3^e.$$

Segítő kérdés: mennyi $f(e)$ értéke és mi f' előjele az (e, ∞) tartományon?

4.21 Feladat. Igazolja, hogy a

$$p(x) = 1 - 2x^{11} + 3x^{24} - 4x^{35} + 5x^{46}$$

polinomnak legfeljebb 4 valós gyöke van!

Segítség: Ha egy $q(x)$ valós polinomnak n gyöke van, akkor q'-nek legalább hány előjelváltása van? Ezt alkalmazzuk többször!

4.22 Feladat. Legyen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ egy mindenütt differenciálható függvény! Igazolja, hogy ha

$$\lim_{x\to\infty} f'(x) = \infty,$$

akkor f nem egyenletesen folytonos a $[0, \infty)$ halmazon!

4.23 Feladat. Igazolja, hogy páratlan függvény deriváltja páros, páros függvény deriváltja páratlan. Mit mondhatunk ez alapján a páros, illetve páratlan függvények monotonitásáról, illetve konvexitásáról?

4.24 Feladat. Igaz-e, hogy minden deriválható függvény deriváltja folytonos? Válasza indoklásához számolja ki az

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{ha } x = 0 \\ x^2 \sin\left(\dfrac{1}{x}\right), & \text{ha } x \neq 0 \end{cases}$$

függvény deriváltját!

5. Integrálás

5.1 Definíció. Az $A \subset \mathbb{R}$ halmaz *Riemann-értelemben nullmértékű*, ha tetszőleges $\varepsilon > 0$ esetén megadható véges sok intervallum úgy, hogy az intervallumok együtt lefedik A-t, és összhosszuk kisebb, mint ε.

Az $A \subset \mathbb{R}$ halmaz *Lebesgue-értelemben nullmértékű*, ha tetszőleges $\varepsilon > 0$ esetén megadható (véges vagy) megszámlálhatóan végtelen sok intervallum úgy, hogy az intervallumok együtt lefedik A-t, és összhosszuk kisebb, mint ε.

5.2 Feladat. Riemann-értelemben illetve Lebesgue-értelemben nullmértékűek-e a következő halmazok?

a) Racionális számok,

b) a $[0, 1]$ intervallumban levő irracionális számok,

c) a Cantor-halmaz,

d) a Cantor-halmaz komplementere a $[0, 1]$ intervallumon.

A *Cantor-halmazt* úgy kapjuk, hogy a $C_0 = [0, 1]$ zárt egység intervallumból elhagyjuk a középső nyílt harmadot, majd az így kapott $C_1 = [0, \frac{1}{3}] \cup [\frac{2}{3}, 1]$ halmaz mindkét zárt intervallumából újra elhagyjuk a középső nyílt harmadot, majd az így kapott $C_2 = [0, \frac{1}{9}] \cup [\frac{2}{9}, \frac{1}{3}] \cup [\frac{2}{3}, \frac{7}{9}] \cup [\frac{8}{9}, 1]$ halmaz mind a négy intervallumából megint elhagyjuk a középső nyílt harmadokat, és ezt így folytatjuk vég nélkül. A C *Cantor-halmaz* a végtelen sok elhagyás után megmaradt „por”:

$$C = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} C_n.$$

5.3 Feladat. Határozzuk meg az

$$\int_{-\pi}^{\pi} \frac{\cos(x)}{e^x + 1} \, \mathrm{d}x$$

integrál értékét!

Segítség: ne a fönt szereplő integranduszhoz próbáljunk primitív függvényt keresni, hanem valahogy inkább használjuk ki, hogy az integrálási tartomány szimmetrikus a nullára!