Komplex számok[1]

1. Határozza meg a $\frac{\overline{z}_1}{\overline{z}_2}$ komplex szám algebrai alakját, ha $z_1 = 3 - 2i$ és $z_2 = 2 + i$.

2. Hozza algebrai alakra az alábbi kifejezéseket:

$$a)\quad 3\Big(\cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}\Big), \qquad\qquad b)\quad \frac{2+i}{i(1-4i)}.$$

3. Írja fel a következő komplex számok trigonometrikus alakját:

$$a)\quad \sqrt{6} - i\sqrt{2}, \qquad\qquad b)\quad -4i, \qquad\qquad c)\quad 8.$$

4. Végezze el a következő gyökvonásokat:

$$a)\quad \sqrt[3]{1}, \qquad\qquad b)\quad \sqrt[4]{-16}, \qquad\qquad c)\quad \sqrt[3]{1 + i\sqrt{3}}.$$

5. Végezze el a következő hatványozásokat:

$$a)\quad (1 + i\sqrt{3})^3, \qquad\qquad b)\quad (1+i)^8, \qquad\qquad c)\quad (1-i)^4.$$

6. Oldja meg a komplex számok halmazán a következő egyenleteket:

$$a)\quad z^3 = 1 + i, \qquad\qquad b)\quad |z| - z = 1 + 2i, \qquad\qquad c)\quad z^2 = \overline{z}.$$

7. Oldja meg az alábbi egyenleteket a komplex számok halmazán! (Az eredményt algebrai alakban adja meg.)

$$a)\quad z^2 + (1+i)\overline{z} + 4i = 0, \qquad\qquad b)\quad 2iz^3 = (1+i)^8.$$

8. Adja meg algebrai alakban az alábbi egyenletnek az összes olyan komplex megoldását, amelynek a valós része pozitív és a képzetes része negatív!

$$\frac{7i+3}{7-3i}z^4 + 8(\sqrt{3} + i) = 0$$

[1]Összeállította: Richlik György.

9. Tegyük fel, hogy a z komplex számra teljesül, hogy z képzetes része nem 0, de a $z + \frac{1}{z}$ komplex szám képzetes része 0. Határozza meg z abszolútértékét, $|z|$-t!

10. Adja meg algebrai alakban az alábbi egyenletnek az összes olyan komplex megoldását, amelynek mind a valós, mind a képzetes része negatív!

$$iz^6 = (7 + i)^2 + \frac{2 - 30i}{1 - i}$$

11. Oldja meg az alábbi egyenleteket komplex számok körében!

$$a) \quad 2z + 3\overline{z} = 5 + 2i, \quad b) \quad (2 + i)z^3 = -9 + 3i, \quad c) \quad |z| + z = 2 + i.$$

12. Hány 12. egységgyök van a komplex 8. egységyökök között?

13. Milyen n-ekre ($n \in \mathbb{N}$) lesz valós a $(\sqrt{3} - i)^n$ komplex szám?

14. A kétezredik komplex egységgyökök között hány olyan van, melynek az ötödik hatványa nem egyenlő eggyel?

15. A kétezredik komplex egységgyökök közül hány olyan van, melynek az ezredik hatványa is eggyel egyenlő?

16. Határozza meg az összes olyan z komplex számot, amelyre $|z + i| = 1$ és $|z - i| = \sqrt{5}$ teljesül!

17. Határozza meg a z komplex számot, ha $z^n = 1$ és $z^m = z + 2$ teljesül valamely n és m pozitív egészekre!

18. Bizonyítsa be, hogy ha ε egy 10-edik és ε' egy 25-ödik egységgyök, akkor $\overline{\varepsilon}\varepsilon$' egy 100-adik egységgyök.

19. Tetszőleges z komplex számra jelölje z^* azt a komplex számot, amit a komplex számsíkon z origó körüli, $+60°$-os (vagyis az óramutató járásával ellentétes irányú $60°$-os) elforgatásával kapunk. Oldja meg a komplex számok halmazán a $z^2 = z^*$ egyenletet és az eredményt adja meg algebrai alakban!

20. Ismert, hogy a komplex számok kétdimenziós vektorteret alkotnak a valós számok felett, azaz $\mathbb{C} \cong \mathbb{R}^2$. Lineáris leképezés/transzformáció-e a következő:

    a) $z \Rightarrow \overline{z}$,

    b) $z \Rightarrow |z|$,

    c) $z \Rightarrow iz$.

    Ha igen, akkor adja meg a leképezés/transzformáció mátrixát is!

21. Adja meg algebrai alakban az alábbi egyenletnek az összes olyan komplex megoldását, amelynek a valós része és a képzetes része is negatív!

$$\frac{5+3i}{3-5i}z^5 + 16\sqrt{3} + 16i = 0$$

22. Adja meg az alábbi egyenlet összes komplex megoldását kanonikus alakban!

$$(\sqrt{3} - i)z^4 = i$$

23. Adja meg kanonikus alakban az alábbi egyenlet összes olyan komplex megoldását, melynek valós és képzetes része is nemnegatív!

$$z^7 - 27z = 0$$