2023.12.13.
Analízis 2. informatikusoknak, ppzh2
(55 perc, 100 pont)

címke névvel, Neptun kóddal

α ■, β □

Válassza ki az egyetlen helyes megoldást![1] **($6 \times 6 = 36$ pont)**

1. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{e^{3x+1}}{\operatorname{sh}(3x+2)} = ?$ □ $\dfrac{1}{2e}$ ■ $\dfrac{2}{e}$ □ ∞ □ e □ 0 □ más.

2. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\cos(x)-1}{x^2} = ?$ □ ∞ □ -2 □ 0 □ $+\dfrac{1}{2}$ ■ $-\dfrac{1}{2}$ □ más.

3. Az $f(x) = \dfrac{1}{x}$ függvény grafikonjához az $x_0 = 2$-ben húzott érintő egyenlete:
■ $y = 1 - \dfrac{x}{4}$ □ $y = 1 - \dfrac{x}{2}$ □ $y = 2 - \dfrac{x}{4}$ □ $y = 2 - x$ □ $y = -1 + 2x$ □ más.

4. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin(3x)}{\ln(1+x)} = ?$ □ 1 □ 0 □ ∞ ■ 3 □ $\frac{1}{3}$ □ más.

5. $\left(\arccos(\sqrt{x})\right)' = ?$ □ $\dfrac{-1}{2\sqrt{x(x-1)}}$ □ $\dfrac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$ □ $\dfrac{2\sqrt{x}}{\sqrt{1-x^2}}$
■ $\dfrac{-1}{2\sqrt{x(1-x)}}$ □ $\dfrac{1}{2\sqrt{x}\cdot\sqrt{x^2-1}}$ □ más.

6. Az $x^2y = \ln(y)$ egyenlet implicit deriváltja x-szerint: (y függ x-től)
□ $2xy' = \dfrac{y'}{y}$ ■ $x(2y + xy') = \dfrac{y'}{y}$ □ $2xy + x^2y' = \dfrac{1}{y'}$
□ $2xy + x^2y' = \dfrac{1}{y}$ □ $2xy' = y'\ln(y)$ □ más.

Minden állításról döntse el, hogy igaz (I) vagy hamis (H)![2] **($16 \times 4 = 64$ pont)**

7. $f(x) = x \cdot \ln(x)$, $D_f = (0, \infty)$

$\lim\limits_{x\to 0+} f(x) = 0$	■ I; □ H;	f-nek van inflexiós pontja	□ I; ■ H;
f alulról korlátos	■ I; □ H;	f-nek van lokális szélsőértéke	■ I; □ H;
f a $(0, \infty)$ intervallumon konvex	■ I; □ H;	f az $(1/e, \infty)$ intervallumon monoton növő	■ I; □ H;

8. $f(x) = x^3 - 3x^2 - 24x + 2$, $D_f = \mathbb{R}$

$\lim\limits_{x\to -\infty} f(x) = +\infty$	□ I; ■ H;	$\lim\limits_{x\to 1} f(x) = 1$	□ I; ■ H;
f korlátos	□ I; ■ H;	f monoton csökkenő a $[-2, 4]$ intervallumon	■ I; □ H;
f-nek van lokális szélsőértéke	■ I; □ H;	f-nek van inflexiós pontja	■ I; □ H;

9. Az f függvény invertálható. (f valós függvény, és mindig a lehető legbővebb halmazon értelmezzük.)

$f(x) = \operatorname{arctg}(x^2)$	□ I; ■ H;	$f(x) = \operatorname{sh}\left(\ln(x)\right)$	■ I; □ H;
$f(x) = \operatorname{arctg}^2(x)$	□ I; ■ H;	$f(x) = \operatorname{ch}\left(\ln(x)\right)$	□ I; ■ H;

[1] A helyes megoldás előtti négyzetet **satírozza be**! Helyes válasz: 6 pont; helytelen vagy nem egyértelmű válasz: 0 pont.

[2] A helyes válasz előtti négyzetet **satírozza be**! Helyes válasz: 4 pont; nem egyértelmű válasz: 0 pont; helytelen válasz: -4 pont, azonban egy-egy feladat teljes pontszáma nem csökken nulla alá.

α/1)

$$\lim_{x\to\infty} \frac{e^{3x+1}}{\operatorname{sh}(3x+2)} = \lim_{x\to\infty} \frac{2e^{3x+1}}{e^{3x+2}-e^{-(3x+2)}} = \lim_{x\to\infty} \frac{2e}{e^2-\underbrace{e^{-6x-2}}_{\to 0}} = \underline{\frac{2}{e}}$$

α/2)

$$\lim_{x\to 0} \frac{\cos x - 1}{x^2} \overset{\frac{0}{0}}{\underset{L'H}{=}} \lim_{x\to 0} \frac{-\sin x}{2x} \overset{\frac{0}{0}}{\underset{L'H}{=}} \lim_{x\to 0} \frac{-\cos x}{2} = \underline{-\frac{1}{2}}$$

α/3)

$$f(x)=\frac{1}{x};\quad x_0=2;\quad f(x_0)=\frac{1}{2};\quad f'(x)=\frac{-1}{x^2};\quad f'(x_0)=\frac{-1}{4}$$

$$\underline{y_{\acute{e}}(x)} = f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0) = \frac{1}{2}-\frac{1}{4}(x-2) = \underline{1-\frac{x}{4}}$$

α/4)

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin(3x)}{\ln(1+x)} \overset{\frac{0}{0}}{\underset{L'H}{=}} \lim_{x\to 0} \frac{3\cos(3x)}{\left(\frac{1}{1+x}\right)} = \underline{3}$$

α/5)

$$\left(\arccos(\sqrt{x})\right)' = \frac{-1}{\sqrt{1-(\sqrt{x})^2}}\cdot\frac{1}{2\sqrt{x}} = \underline{\frac{-1}{2\sqrt{x(1-x)}}}$$

α/6)

$$x^2 y = \ln y \xrightarrow{\frac{d}{dx}} 2xy + x^2 y' = \frac{y'}{y} \Rightarrow \underline{x(2y+xy') = \frac{y'}{y}}$$

α/7)

$$f(x) = x\ln x;\quad D_f = (0,+\infty)$$

$$\lim_{x\to 0+} \underbrace{x}_{\to 0}\cdot\underbrace{\ln x}_{\to(-\infty)} = \lim_{x\to 0+}\frac{\ln x}{\left(\frac{1}{x}\right)} \overset{\frac{\infty}{\infty}}{\underset{L'H}{=}} \lim_{x\to 0+}\frac{1/x}{-1/x^2} = \lim_{x\to 0+}(-x) = 0$$

$$f'(x) = \ln x + x\frac{1}{x} = 1+\ln x = 0 \iff x=\frac{1}{e}$$

x	$0<x<\frac{1}{e}$	$\frac{1}{e}$	$\frac{1}{e}<x$
f'	$-$	0	$+$
f	$\searrow$	lok. min.	$\nearrow$

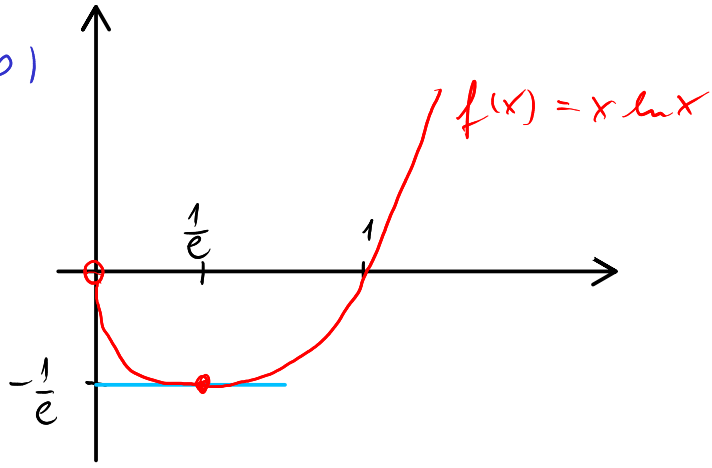
$f\left(\frac{1}{e}\right) = \frac{-1}{e}$ globální minimum

$\Rightarrow$ f ohraničená

$f''(x) = \frac{1}{x} > 0$, ha $x \in D_f = (0, +\infty)$

$\Rightarrow$ f konvex D_f-en

(nincs inflexiós pontja)



4/8, $f(x) = x^3 - 3x^2 - 24x + 2$; $D_f = \mathbb{R}$

$\lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x) = \pm\infty$; $\lim\limits_{x \to 1} f(x) = f(1) = 1 - 3 - 24 + 2 \neq 1$

$\hookrightarrow$ f nem korlátos

$f'(x) = 3x^2 - 6x - 24 = 3(x^2 - 2x - 8) =$

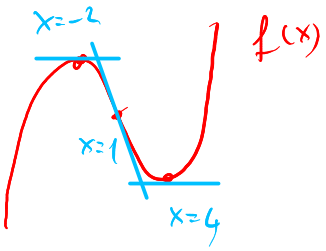
$= 3(x-4)(x+2)$ $\quad x_1 = -2$, $x_2 = +4$

x	$x < -2$	-2	$-2 < x < 4$	4	$4 < x$
f'	$+$	0	$-$	0	$+$
f	$\nearrow$	lok max	$\searrow$	lok min	$\nearrow$

$f''(x) = 6x - 6 = 0 \iff x = 1$ inflexiós pont,

$x \leq 1$-en $f'' \leq 0 \Rightarrow f$ konkáv

$x \geq 1$-en $f'' \geq 0 \Rightarrow f$ konvex



4/9, $\operatorname{arctg} x^2$ páros $\Rightarrow$ nem invertálható

$\operatorname{arctg}^2 x$ —"— —"—

$\operatorname{sh}(\ln x)$ szigorúan monoton nő, mert $\ln \uparrow$, $\operatorname{sh} \uparrow \Rightarrow$ invertálható

$\operatorname{ch}(\ln x) = \underset{\text{páros}}{\operatorname{ch}}(\underbrace{\ln(\tfrac{1}{x})}_{-\ln x}) \Rightarrow$ nem invertálható

2023.12.13.
Analízis 2. informatikusoknak, ppzh2
(55 perc, 100 pont)

α ☐, β ■

címke névvel, Neptun kóddal

Válassza ki az egyetlen helyes megoldást![1] **($6 \times 6 = 36$ pont)**

1. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\cos(x)-1}{x^2} = ?$ ☐ ∞ ☐ $+\frac{1}{2}$ ■ $-\frac{1}{2}$ ☐ -2 ☐ 0 ☐ más.

$\alpha/2$

2. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{e^{5x+2}}{\mathrm{ch}(5x+1)} = ?$ ☐ $\frac{1}{2e}$ ☐ $\frac{2}{e}$ ☐ ∞ ■ $2e$ ☐ 0 ☐ más.

$\alpha/1$-ben hasonló

3. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln(1+3x)}{\sin(x)} = ?$ ☐ 1 ☐ 0 ☐ ∞ ☐ $\frac{1}{3}$ ■ 3 ☐ más.

$\alpha/4$-ben hasonló

4. Az $f(x) = \dfrac{1}{x}$ függvény grafikonjához az $x_0 = 2$-ben húzott érintő egyenlete:
☐ $y = 2 - \frac{x}{4}$ ☐ $y = 2 - x$ ☐ $y = -1 + 2x$ ■ $y = 1 - \frac{x}{4}$ ☐ $y = 1 - \frac{x}{2}$ ☐ más.

$\alpha/3$

5. Az $x^2 y = \ln(y)$ egyenlet implicit deriváltja x-szerint: (y függ x-től)
☐ $2xy' = \frac{y'}{y}$ ☐ $2xy + x^2y' = \frac{1}{y}$ ☐ $2xy' = y'\ln(y)$
■ $x(2y + xy') = \frac{y'}{y}$ ☐ $2xy + x^2y' = \frac{1}{y'}$ ☐ más.

$\alpha/6$

6. $\left(\arcsin(\sqrt{x})\right)' = ?$ ☐ $\dfrac{1}{2\sqrt{x(x-1)}}$ ☐ $\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ ☐ $\dfrac{-2\sqrt{x}}{\sqrt{1-x^2}}$
■ $\dfrac{1}{2\sqrt{x(1-x)}}$ ☐ $\dfrac{-1}{2\sqrt{x}\cdot\sqrt{x^2-1}}$ ☐ más.

$\alpha/5$-ben hasonló

Minden állításról döntse el, hogy igaz (I) vagy hamis (H)![2] **($16 \times 4 = 64$ pont)**

7. Az f függvény invertálható. (f valós függvény, és mindig a lehető legbővebb halmazon értelmezzük.)

$\alpha/9$

$f(x) = \mathrm{arctg}^2(x)$	☐ I; ■ H;	$f(x) = \mathrm{ch}\left(\ln(x)\right)$	☐ I; ■ H;
$f(x) = \mathrm{arctg}(x^2)$	☐ I; ■ H;	$f(x) = \mathrm{sh}\left(\ln(x)\right)$	■ I; ☐ H;

8. $f(x) = x \cdot \ln(x)$, $D_f = (0, \infty)$

$\alpha/7$

$\lim\limits_{x\to 0+} f(x) = 0$	■ I; ☐ H;	f-nek van inflexiós pontja	☐ I; ■ H;
f alulról korlátos	■ I; ☐ H;	f-nek nincs lokális szélsőértéke	☐ I; ■ H;
f a $(0, \infty)$ intervallumon konvex	■ I; ☐ H;	f az $(0, 1/e)$ intervallumon monoton csökkenő	■ I; ☐ H;

9. $f(x) = x^3 - 3x^2 - 24x + 2$, $D_f = \mathbb{R}$

$\alpha/8$

$\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = -\infty$	☐ I; ■ H;	$\lim\limits_{x\to -1} f(x) = -1$	☐ I; ■ H;
f nem korlátos	■ I; ☐ H;	f monoton csökkenő a $[-2, 4]$ intervallumon	■ I; ☐ H;
f-nek van inflexiós pontja	■ I; ☐ H;	f-nek nincs lokális szélsőértéke	☐ I; ■ H;

[1] A helyes megoldás előtti négyzetet **satírozza be**! Helyes válasz: 6 pont; helytelen vagy nem egyértelmű válasz: 0 pont.

[2] A helyes válasz előtti négyzetet **satírozza be**! Helyes válasz: 4 pont; nem egyértelmű válasz: 0 pont; helytelen válasz: -4 pont, azonban egy-egy feladat teljes pontszáma nem csökken nulla alá.