

1. feladat (25 pont)

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sin(x^2 - 1)}{x - 1}, & \text{ha } x \geq 0; \\ \frac{\operatorname{arctg}\left(\frac{1}{x}\right)}{x + 1}, & \text{ha } x < 0; \end{cases}$$

Vizsgálja meg, hogy az  $f$  függvény hol folytonos, hol nem, és a szakadási helyeken a bal és jobb oldali határértékek kiszámolása után állapítsa meg azok jellegét!

2. feladat (7+7=14 pont)

Határozza meg a következő függvények deriváltját a megadott tartományokon! (Számolási szabályokkal.)

$$(a) \quad f(x) = e^{3x^2+2} \cdot \sin(\sqrt{x}) \quad (x > 0) \quad (b) \quad g(x) = \frac{x^3 \operatorname{ch}(3x)}{\operatorname{arsh}(2x + 1)} \quad (x \neq -1/2)$$

3. feladat (13+13=26 pont)

Határozza meg a következő határértékeket!

$$(a) \quad \lim_{x \rightarrow 1} \left( \ln(x) \cdot \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2}x\right) \right) = ? \quad (b) \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^x \cdot \operatorname{sh}(3x + 1)}{\operatorname{ch}(4x + 2)} = ?$$

4. feladat (7+10+10+8=35 pont)

$$f(x) = 4x^3 - x^4, \quad D_f = \mathbb{R}$$

Végezzen teljes függvényvizsgálatot a fenti függvényen, azaz

- Határozza meg a függvény limeszét  $\pm\infty$ -ben és a függvény zérushelyeit!
- Határozza meg azokat a legbővebb intervallumokat, ahol a függvény monoton növekvő illetve csökkenő! Határozza meg a lokális szélsőérték helyeket!
- Határozza meg azokat a legbővebb intervallumokat, ahol a függvény konvex illetve konkáv! Határozza meg az inflexiós pontokat!
- Vázlatosan ábrázolja a függvényt! Határozza meg  $f$  értékkészletét!

5. feladat (10 pont, IMSC-seknek javasolt.)

$$f(x) = x^{\frac{1}{3}} \cdot \sin\left(x^{\frac{2}{3}}\right), \quad D_f = [0, +\infty)$$

Határozza meg  $f$  deriváltját minden  $x > 0$  pontban, valamint  $f$  jobb oldali deriváltját az origóban!