1. feladat (25 pont)

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin(x^2-1)}{x-1}, & \text{ha } x \geq 0; \\[2ex] \dfrac{\operatorname{arctg}\left(\frac{1}{x}\right)}{x+1}, & \text{ha } x < 0; \end{cases}$$

Vizsgálja meg, hogy az f függvény hol folytonos, hol nem, és a szakadási helyeken a bal és jobboldali határértékek kiszámolása után állapítsa meg azok jellegét!

$D_f = \mathbb{R} \setminus \{+1, -1\}$. (2) f folytonos $D_f \setminus \{0\} = \mathbb{R} \setminus \{0, \pm 1\}$-en, mert itt folytonos függvények hányadosaként definiáltuk, és a nevező $\neq 0$ (2)

Vizsgálandó: $-1, 0, +1$

−1-ben:

$\operatorname{arctg}(-1) = -\frac{\pi}{4} < 0$

$$\lim_{x \to -1\pm} f(x) = \lim_{x \to -1\pm} \frac{\operatorname{arctg}\left(\frac{1}{x}\right)}{\underbrace{x+1}_{\to 0\pm}} = \mp\infty \quad (5)$$

másodfajú szakadás (1)

0-ban:

$$\lim_{x \to 0+} f(x) = \lim_{x \to 0} \frac{\sin(x^2-1)}{x-1} = \frac{\sin(-1)}{-1} = \sin(1) \quad (3)$$

$$\lim_{x \to 0-} f(x) = \lim_{x \to 0-} \frac{\operatorname{arctg}\left(\frac{1}{x}\right)}{x+1} = \frac{-\pi/2}{0+1} = -\frac{\pi}{2} \quad (4)$$

$\frac{1}{x} \to -\infty$

Elsőfajú, (1) véges ugrás

+1-ben:

$$\lim_{x \to 1} f(x) = \lim_{x \to 1} \frac{\sin(x^2-1)}{x-1} \cdot \frac{(x+1)}{x+1} \; (3) = \lim_{x \to 1} \underbrace{\frac{\sin(x^2-1)}{x^2-1}}_{\to 1} \cdot \underbrace{(x+1)}_{\to 2} = 2 \quad (3)$$

$x^2-1 \to 0$

Elsőfajú, megszüntethető (1)

2. feladat (7+7=14 pont)

Határozza meg a következő függvények deriváltját a megadott tartományokon! (Számolási szabályokkal.)

$$(a) \quad f(x) = e^{3x^2+2} \cdot \sin\left(\sqrt{x}\right) \quad (x > 0) \qquad (b) \quad g(x) = \frac{x^3 \operatorname{ch}(3x)}{\operatorname{arsh}(2x+1)} \quad (x \neq -1/2)$$

a)

$$f'(x) = 6x e^{3x^2+2} \sin(\sqrt{x}) + e^{3x^2+2} \cdot \cos(\sqrt{x}) \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}} \quad 7$$

b,

$$g'(x) = \frac{(3x^2 \operatorname{ch}(3x) + x^3 \cdot 3 \operatorname{sh}(3x)) \operatorname{arsh}(2x+1) - x^3 \operatorname{ch}(3x) \cdot \frac{2}{\sqrt{1+(2x+1)^2}}}{\operatorname{arsh}^2(2x+1)} \quad 7$$

3. feladat (13+13=26 pont)

Határozza meg a következő határértékeket!

$$(a) \quad \lim_{x\to 1} \left(\ln(x) \cdot \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2}x\right)\right) = ? \qquad (b) \quad \lim_{x\to\infty} \frac{e^x \cdot \operatorname{sh}(3x+1)}{\operatorname{ch}(4x+2)} = ?$$

a,

$$\lim_{x\to 1} \Big(\underbrace{\ln(x)}_{\to 0} \cdot \underbrace{\operatorname{tg}\left(\tfrac{\pi}{2}x\right)}_{\to \pm\infty}\Big) = \lim_{x\to 1} \frac{\ln(x)}{\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{2}x\right)} \; 3 \; \overset{\frac{0}{0}}{\underset{L'H}{=}} \; 2 \; \lim_{x\to 1} \frac{1/x \; 2}{-\frac{\pi}{2} \cdot \frac{1}{\sin^2\left(\frac{\pi}{2}x\right)} \; 2} =$$

$$= \lim_{x\to 1} -\frac{2\sin^2\left(\frac{\pi}{2}x\right)}{\pi x} = -\frac{2\sin^2(\pi/2)}{\pi} \; 2 = -\frac{2}{\pi} \; 2$$

b,

$$\lim_{x\to\infty} \frac{e^x \operatorname{sh}(3x+1)}{\operatorname{ch}(4x+2)} = \lim_{x\to\infty} \frac{e^x \cdot (e^{3x+1} - e^{-3x-1}) \cdot \cancel{2}}{\cancel{2} \cdot (e^{4x+2} + e^{-4x-2})} \; 5 =$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{\cancel{e^{6x}}}{\cancel{e^{6x}}} \cdot \frac{e - \overbrace{e^{-6x-1}}^{\to 0}}{e^2 + \underbrace{e^{-8x-2}}_{\to 0}} \; 5 = \frac{e}{e^2} = e^{-1} \; 3$$

4. feladat (7+10+10+8=35 pont)

$$f(x) = 4x^3 - x^4, \qquad D_f = \mathbb{R}$$

Végezzen teljes függvényvizsgálatot a fenti függvényen, azaz

(a) Határozza meg a függvény limeszét $\pm\infty$-ben és a függvény zérushelyeit!

(b) Határozza meg azokat a legbővebb intervallumokat, ahol a függvény monoton növő illetve csökkenő! Határozza meg a lokális szélsőértékhelyeket!

(c) Határozza meg azokat a legbővebb intervallumokat, ahol a függvény konvex illetve konkáv! Határozza meg az inflexiós pontokat!

(d) Vázlatosan ábrázolja a függvényt! Határozza meg f értékkészletét!

a, $\lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$ 2; $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$; 2

$f(x) = x^3(4-x) = 0 \iff x=0$ vagy $x=4$ 3

b, $f'(x) = 12x^2 - 4x^3 =$ 3

$= 4x^2(3-x)$

$f'(x) = 0 \iff x=0$ vagy $x=3$ 3

4

x	$x<0$	0	$0<x<3$	3	$3<x$
f'	$+$	0	$+$	0	$-$
f	$\nearrow$		$\nearrow$	lok. max.	$\searrow$

nincs lokális szélsőérték

$f(3) = 4\cdot 27 - 81 = 27$ lok. max.

c, $f''(x) = 24x - 12x^2 = 12x(2-x) = 0 \iff x=0$ vagy $x=2$ 3 3

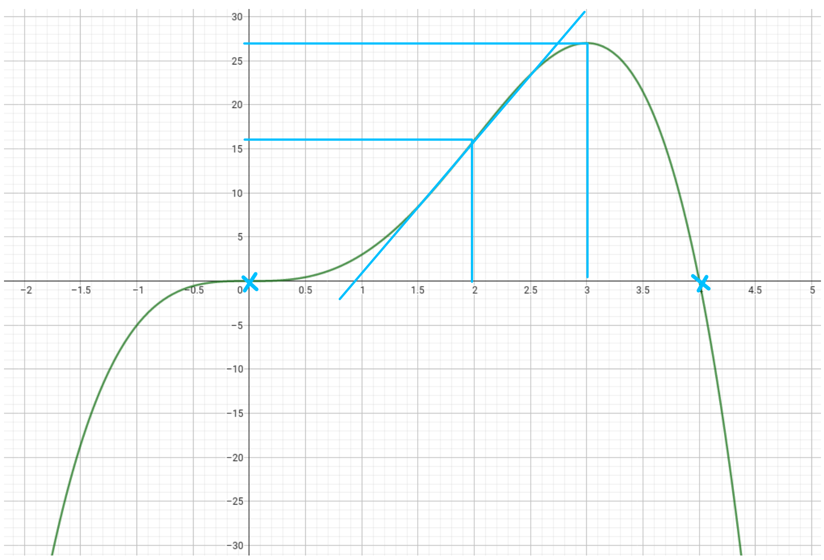
x	$x<0$	0	$0<x<2$	2	$2<x$
f''	$-$	0	$+$	0	$-$
f	$\cap$	infl. pont	$\cup$	infl. pont	$\cap$

4

$f(0) = 0$

$f(2) = 4\cdot 8 - 16 = 16$

d,



5

$R_f = (-\infty; 27]$ 3

5. feladat (10 pont, IMSC-seknek javasolt.)

$$f(x) = x^{\frac{1}{3}} \cdot \sin\left(x^{\frac{2}{3}}\right), \qquad D_f = [0, +\infty)$$

Határozza meg f deriváltját minden $x > 0$ pontban, valamint f jobb oldali deriváltját az origóban!

Ha $x > 0$:

$$f'(x) = \frac{1}{3} x^{-2/3} \sin(x^{2/3}) + x^{1/3} \cos(x^{2/3}) \cdot \frac{2}{3} x^{-1/3} \qquad 5$$

Ha $x = 0$:

$$f'_+(0) = \lim_{h \to 0+} \frac{f(h) - f(0)}{h} \; 2 = \lim_{h \to 0+} \frac{1}{h} \left(h^{1/3} \sin(h^{2/3}) - 0 \right) =$$

$$= \lim_{h \to 0+} \frac{\sin(h^{2/3})}{h^{2/3}} = \underline{1} \; 3$$