2023.11.28.
Analízis 2. informatikusoknak, pzh2
Teszt (75 perc, 110 pont)

címke névvel, Neptun kóddal

$\boldsymbol{\alpha}$ ■, $\boldsymbol{\beta}$ □ (satírozza be a nem jelölt variánst is, ha javító szándékkal nem adja be a dolgozatát)

Válassza ki az egyetlen helyes megoldást![1] **($7 \times 5 = 35$ pont)**

1. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\operatorname{sh}(2x)}{\operatorname{ch}(3x)} = ?$ ■ 0 □ 1 □ ∞ □ e □ $\dfrac{2}{3}$ □ más.

2. $\lim\limits_{x\to\pi/2+0} \left(x - \dfrac{\pi}{2}\right) \cdot \operatorname{tg}(x) = ?$ □ 0 □ 1 ■ -1 □ $-\dfrac{\pi}{2}$ □ $-\infty$ □ más.

3. Az $f(x) = x^2$ függvény grafikonjához az $x_0 = 2$-ben húzott érintő egyenlete:
□ $y = 4(x+1)$; □ $y = 2x - 2$; ■ $y = 4(x-1)$ □ $y = 4x - 2$ □ más.

4. $\lim\limits_{x\to 1} \operatorname{arctg}\left(\dfrac{x}{|1-x|}\right) = ?$ □ 0; □ 1; □ -1; ■ $\dfrac{\pi}{2}$; □ $\dfrac{-\pi}{2}$; □ más.

5. $\left(x^x\right)' = ?$ □ $x \cdot x^{x-1}$; □ $\ln(x) \cdot x^x$; □ $\ln(x) \cdot x^{x-1}$; ■ $\big(1 + \ln(x)\big) \cdot x^x$ □ más.

6. $\big(\operatorname{arsh}(1/x)\big)' = ?$ ■ $\dfrac{-1}{\sqrt{x^2(x^2+1)}}$; □ $\dfrac{+1}{\sqrt{x^2(x^2-1)}}$; □ $\dfrac{-1}{\sqrt{x^2+1}}$; □ $\dfrac{+1}{\sqrt{x^2-1}}$; □ más.

7. Az $\dfrac{e^y}{y} = x$ egyenlet implicit deriváltja x-szerint: (y függ x-től)
□ $\dfrac{-e^y y'}{y^2} = 1$; □ $y' e^y \left(\frac{1}{y} + 1\right) = 1$; □ $\dfrac{y' e^y}{y'} = 1$; □ $y' e^y \left(\frac{1}{y} - 1\right) = 1$; ■ más.

Minden állításról döntse el, hogy igaz (I) vagy hamis (H)![2] **($25 \times 3 = 75$ pont)**

8. $f(x) = \dfrac{1}{\operatorname{ch}(x)}$ (valós függvény, a legbővebb halmazon értelmezve)

páros	■ I; □ H;	f-nek pontosan két inflexiós pontja van	■ I; □ H;
nem korlátos	□ I; ■ H;	f-nek pontosan két helyen van lokális szélsőértéke	□ I; ■ H;
a $(0,\infty)$ intervallumon konvex	□ I; ■ H;	a $(0,\infty)$ intervallumon csökkenő	■ I; □ H;

9. $f(x) = \dfrac{1}{1+e^x}$ (valós függvény, a legbővebb halmazon értelmezve)

$\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = 0$	■ I; □ H;	$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 0$	□ I; ■ H;
korlátos	■ I; □ H;	szigorúan monoton csökkenő $\mathbb{R}$-en	■ I; □ H;
f-nek van lokális szélsőértéke	□ I; ■ H;	f-nek az origóban inflexiós pontja van	■ I; □ H;

10. $f(x) = 5\pi - 4\arcsin(3-2x)$ (valós függvény, a legbővebb halmazon értelmezve)

értelmezési tartománya $[1,2]$	■ I; □ H;	monoton nő értelmezési tartományán	■ I; □ H;
differenciálható mindenütt, ahol értelmezve van	□ I; ■ H;	injektív	■ I; □ H;
értékkészlete $[4\pi, 6\pi]$	□ I; ■ H;	$\lim\limits_{x\to 1+0} f'(x) = -\infty$	□ I; ■ H;

11. $f(x) = \dfrac{x^2}{x-2}$; $D_f = \mathbb{R} \setminus \{2\}$

$\lim\limits_{x\to 2+0} f(x) = +\infty$	■ I; □ H;	0-ban lokális szélsőértéke van	■ I; □ H;
$(0,4)$ intervallumon monoton csökken	□ I; ■ H;	$(2,\infty)$ intervallumon konvex	■ I; □ H;

12. IMSC. $f(x) = x^2\big(2 + \sin(1/x)\big)$, ha $x \neq 0$, és $f(0) = 0$.

f deriválható az origóban	■ I; □ H;	f-nek lokális minimuma van az origóban	■ I; □ H;
f' előjelet vált az origóban	□ I; ■ H;		

[1] A helyes megoldás előtti négyzetet **satírozza be**! Helyes válasz: 5 pont; helytelen vagy nem egyértelmű válasz: 0 pont.

[2] A helyes válasz előtti négyzetet **satírozza be**! Helyes válasz: 3 pont; nem egyértelmű válasz: 0 pont; helytelen válasz: -3 pont, azonban egy-egy feladat teljes pontszáma nem csökken nulla alá.

α/1,

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\operatorname{sh}(2x)}{\operatorname{ch}(3x)}=\lim_{x\to\infty}\frac{(e^{2x}-e^{-2x})\cdot\cancel{2}}{(e^{3x}+e^{-3x})\cdot\cancel{2}}=\lim_{x\to\infty}\frac{\overset{\nearrow 0}{e^{-x}}-\overset{\nearrow 0}{e^{-5x}}}{1+\underset{\searrow 0}{e^{-6x}}}=\frac{0}{1}=\underline{0}$$

α/2,

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}+0}\overbrace{\left(x-\frac{\pi}{2}\right)}^{\to 0+}\cdot\overbrace{\operatorname{tg}(x)}^{\to -\infty}=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}+0}\overbrace{\frac{\left(x-\frac{\pi}{2}\right)}{\cos x}}^{\frac{0}{0},\ L'H}\cdot\overbrace{\lim_{x\to\frac{\pi}{2}+0}\sin x}^{\to 1}=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}+0}\frac{1}{-\sin x}=\underline{-1}$$

α/3, $f(x)=x^2;\ x_0=2;\ f(x_0)=2^2=4;\ f'(x)=2x;\ f'(x_0)=4$

$$y_e(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)=4+4(x-2)=4x-4=\underline{4(x-1)}$$

α/4,

$$\lim_{x\to 1}\operatorname{arctg}\left(\frac{\overset{\to 1}{x}}{\underbrace{|1-x|}_{\to 0+}}\right)=\lim_{t\to+\infty}\operatorname{arctg} t=\underline{\frac{\pi}{2}}$$

$\frac{1}{0+}=+\infty$

α/5,

$$(x^x)'=\left(\left(e^{\ln x}\right)^x\right)'=\left(e^{x\ln x}\right)'=\underbrace{e^{x\ln x}}_{x^x}\cdot\underbrace{(x\ln x)'}_{\ln x+\underbrace{x\frac{1}{x}}_{1}}=\underline{x^x(1+\ln x)}$$

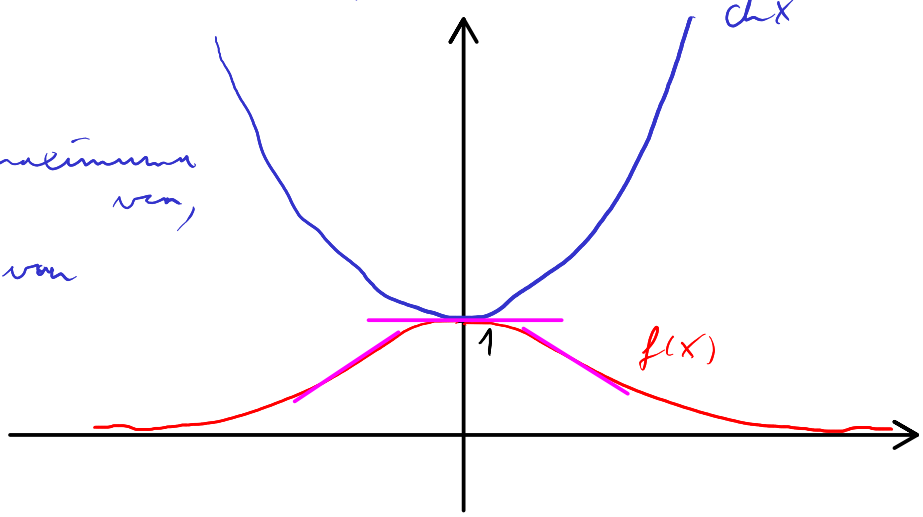
α/6,

$$\left(\operatorname{arsh}\left(\frac{1}{x}\right)\right)'=\frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{1}{x}\right)^2}}\cdot\underbrace{\left(\frac{1}{x}\right)'}_{-\frac{1}{x^2}}=\frac{-1}{\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}\cdot x^2}=\underline{\frac{-1}{\sqrt{x^2(x^2+1)}}}$$

α/7,

$$\frac{e^y}{y}=x\ \xRightarrow{d/dx}\ \frac{e^y\cdot y'\cdot y-e^y\cdot y'}{y^2}=1\ \Rightarrow\ \underline{e^y\cdot y'\left(\frac{1}{y}-\frac{1}{y^2}\right)=1}$$

α/8, $f(x)=\frac{1}{\operatorname{ch}x}$ ch x és f(x) grafikonja:



A rajz alapján:

f korlátos, 0-ban maximum van,

két inflexiós pontja van

páros

Sémantics:

$f'(x) = \frac{-\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch}^2 x}$; $\operatorname{ch}^2 x \geq 1$

x	$x<0$	0	$0<x$
f'	$+$	0	$-$
f	$\nearrow$	lok. max	$\searrow$

$$f''(x) = \frac{-\operatorname{ch}^{\cancel{3}2} x + \operatorname{sh} x\, 2\cancel{\operatorname{ch} x} \operatorname{sh} x}{\operatorname{ch}^{\cancel{4}3}(x)} =$$

$$= \frac{2\operatorname{sh}^2 x - \operatorname{ch}^2 x}{\operatorname{ch}^3 x} \underset{\operatorname{ch}^2 x = 1 + \operatorname{sh}^2 x}{=} \frac{\operatorname{sh}^2 x - 1}{\operatorname{ch}^3 x} = 0 \iff x = \underbrace{\pm \operatorname{arsh} 1}_{\pm x_1}$$

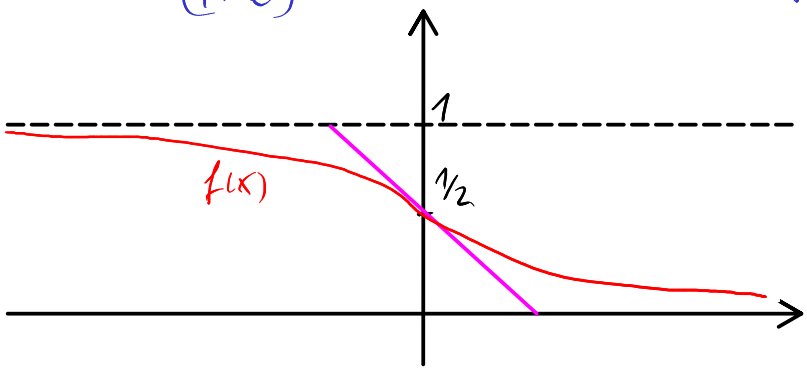
x	$x<-x_1$	$-x_1$	$-x_1<x<+x_1$	x_1	$x_1<x$
f''	$+$	0	$-$	0	$+$
f	$\cup$	inf. point	$\cap$	inf. point	$\cup$

α/9, $f(x) = \frac{1}{1+e^x}$; $\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{1+\underbrace{e^x}_{\to\infty}} = \frac{1}{\infty} = 0$; $\lim_{x\to-\infty} \frac{1}{1+\underbrace{e^x}_{\to 0}} = \frac{1}{1+0} = 1$

$f'(x) = \frac{-e^x}{(1+e^x)^2} < 0 \Rightarrow f \downarrow$ $\mathbb{R}$-en

$$f''(x) = \frac{-e^x(1+e^x)^{\cancel{2}} + e^x 2\cancel{(1+e^x)} e^x}{(1+e^x)^{\cancel{4}3}} =$$

$$= \frac{e^{2x} - e^x}{(1+e^x)^3} = \frac{\overset{>0}{e^x}(e^x - 1)}{\underbrace{(1+e^x)^3}_{\geq 1}} = 0 \iff x = 0$$



x	$x<0$	0	$0<x$
f''	$-$	0	$+$
f	$\cap$	inf. point	$\cup$

α/10, $f(x) = 5\pi - 4\arcsin(3-2x)$

$-1 \leq 3-2x \leq +1 \Rightarrow -4 \leq -2x \leq -2 \Rightarrow 2 \geq x \geq 1 \Rightarrow D_f = [1,2]$

$f(1) = 5\pi - 4\underbrace{\arcsin(1)}_{\pi/2} = 3\pi$; $f(2) = 5\pi - 4\underbrace{\arcsin(-1)}_{-\frac{\pi}{2}} = 7\pi$; $R_f = [3\pi, 7\pi]$

$x \mapsto (3-2x) \downarrow \Rightarrow \arcsin(3-2x) \downarrow \Rightarrow -\arcsin(3-2x) \uparrow \Rightarrow f \uparrow$ (Sig. mon. na D_f-en)

f injektív

$f'(x) = \frac{(-4)\cdot(-2)}{\sqrt{1-(3-2x)^2}} > 0$

$D_{f'} = (1,2)$; $\nexists f'(1)$, $\nexists f'(2)$

$$\lim_{x\to 1+0} f'(x) = \lim_{x\to 1+0} \frac{8}{\sqrt{\underbrace{1-(3-2x)^2}_{\to 0+0}}} = +\infty$$

$1-0$

α/11, $f(x)=\dfrac{x^2}{x-2}$; $D_f=\mathbb{R}\setminus\{2\}$

$$\lim_{x\to 2+}\frac{\overset{\to 4}{x^2}}{\underset{\to 0+}{x-2}}=+\infty \qquad f'(x)=\frac{2x(x-2)-x^2}{(x-2)^2}=\frac{x^2-4x}{(x-2)^2}=\frac{x(x-4)}{\underbrace{(x-2)^2}_{\geq 0}}$$

x	$x<0$	0	$0<x<2$	2	$2<x<4$	4	$4<x$
f'	$+$	0	$-$	$\nexists$	$-$	0	$+$
f	$\nearrow$	lok. max	$\searrow$	$\nexists$	$\searrow$	lok. min	$\nearrow$

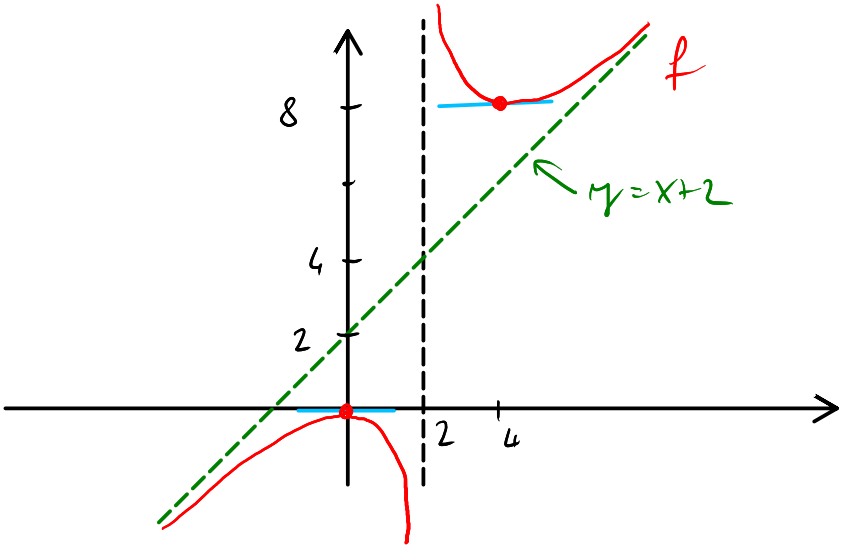
$f(0)=0$ $\qquad$ $f(4)=8$

$$f''(x)=\frac{(2x-4)(x-2)^{\cancel{2}}-(x^2-4x)\,2\cancel{(x-2)}}{(x-2)^{\cancel{4}\,3}}=\frac{8}{(x-2)^3}=\left(\frac{2}{x-2}\right)^3$$

x	$x<2$	2	$2<x$
f''	$-$	$\nexists$	$+$
f	$\cap$	$\nexists$	$\cup$

$$f(x)=\frac{\overbrace{x^2-4}^{(x+2)(x-2)}+4}{x-2}=$$

$$=x+2+\frac{4}{x-2}$$

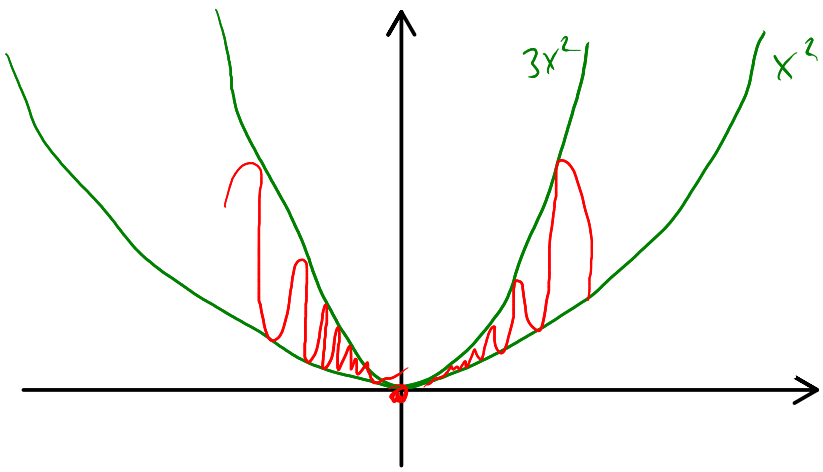


α/12, $f(x)=x^2(2+\sin(1/x))$; $f(0)=0$

$$f'(0)=\lim_{h\to 0}\frac{f(h)-f(0)}{h}=\lim_{h\to 0}\underset{\downarrow\,0}{h}\underbrace{(2+\sin(1/h))}_{\text{korlátos}}=0$$

$f(x)\geq x^2(2-1)=x^2\geq 0=f(0)\Rightarrow$ f-nek globális minimum $f(0)=0$.

Ha $x=0$: $f'(x)=2x(2+\sin(1/x))+\cancel{x^2}\cos\frac{1}{x}\left(\frac{-1}{\cancel{x^2}}\right)=\underbrace{2x(2+\sin(\tfrac{1}{x}))}_{\text{kicsi, ha } x\to 0}-\underbrace{\cos(\tfrac{1}{x})}_{\pm 1 \text{ körül oszcillál}}$



$\forall\,\delta>0$-ra a $(0,+\delta)$ intervallumon f' felvesz $+$ és $-$ értéket is $\Rightarrow$

f' nem vált előjelet 0-ban.

2023.11.28.
Analízis 2. informatikusoknak, pzh2
Teszt (75 perc, 110 pont)

címke névvel, Neptun kóddal

α ☐, β ■ (satírozza be a nem jelölt variánst is, ha javító szándékkal nem adja be a dolgozatát)

Válassza ki az egyetlen helyes megoldást![1] **($7 \times 5 = 35$ pont)**

1. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\operatorname{ch}(3x)}{\operatorname{sh}(5x)} = ?$ ☐ 1 ☐ ∞ ☐ e ■ 0 ☐ $\dfrac{2}{3}$ ☐ más.

2. $\left(x^x\right)' = ?$ ☐ $x \cdot x^{x-1}$; ☐ $\ln(x) \cdot x^x$; ☐ $\ln(x) \cdot x^{x-1}$; ■ $\big(1+\ln(x)\big) \cdot x^x$ ☐ más.

3. $\big(\operatorname{arch}(1/x)\big)' = ?$ ☐ $\dfrac{+1}{\sqrt{x^2(x^2+1)}}$; ☐ $\dfrac{-1}{\sqrt{x^2(x^2-1)}}$; ☐ $\dfrac{-1}{\sqrt{x^2+1}}$; ☐ $\dfrac{+1}{\sqrt{x^2-1}}$; ■ más.

4. Az $\dfrac{e^y}{y} = x$ egyenlet implicit deriváltja x-szerint: (y függ x-től)
☐ $\dfrac{y'e^y}{y'} = 1$; ☐ $y'e^y\big(\frac{1}{y} - 1\big) = 1$; ☐ $\dfrac{-e^y y'}{y^2} = 1$; ☐ $y'e^y\big(\frac{1}{y} + 1\big) = 1$; ■ más.

5. $\lim\limits_{x\to-\pi/2+0} \left(x + \dfrac{\pi}{2}\right) \cdot \operatorname{tg}(x) = ?$ ☐ 0 ☐ 1 ☐ $-\infty$ ■ -1 ☐ $-\dfrac{\pi}{2}$ ☐ más.

6. Az $f(x) = x^2$ függvény grafikonjához az $x_0 = 3$-ben húzott érintő egyenlete:
☐ $y = 3(x+3)$; ☐ $y = 3(x-3)$ ☐ $y = 3x - 3$; ☐ $y = 6x - 3$ ■ más.

7. $\lim\limits_{x\to-1} \operatorname{arctg}\left(\dfrac{x}{|1+x|}\right) = ?$ ☐ 0; ☐ 1; ☐ $\dfrac{\pi}{2}$; ■ $\dfrac{-\pi}{2}$; ☐ -1; ☐ más.

Minden állításról döntse el, hogy igaz (I) vagy hamis (H)![2] **($25 \times 3 = 75$ pont)**

8. $f(x) = 3\pi + 4\arcsin(3-2x)$ (valós függvény, a legbővebb halmazon értelmezve)

értelmezési tartománya $[1,2]$	■ I; ☐ H;	monoton nő értelmezési tartományán	☐ I; ■ H;
differenciálható mindenütt, ahol értelmezve van	☐ I; ■ H;	injektív	■ I; ☐ H;
értékkészlete $[2\pi, 4\pi]$	☐ I; ■ H;	$\lim\limits_{x\to1+0} f'(x) = -\infty$	■ I; ☐ H;

9. $f(x) = \dfrac{x^2}{x+2}$; $D_f = \mathbb{R} \setminus \{-2\}$

$(-4,0)$ intervallumon monoton csökken ☐ I; ■ H; $(-2,\infty)$ intervallumon konvex ■ I; ☐ H;
$\lim\limits_{x\to-2+0} f(x) = +\infty$ ■ I; ☐ H; 0-ban lokális szélsőértéke van ■ I; ☐ H;

10. $f(x) = \dfrac{1}{\operatorname{ch}(x)}$ (valós függvény, a legbővebb halmazon értelmezve)

páratlan	☐ I; ■ H;	a $(-\infty,0)$ intervallumon konvex	☐ I; ■ H;
nem korlátos	☐ I; ■ H;	a $(-\infty,0)$ intervallumon növő	■ I; ☐ H;
f-nek pontosan két inflexiós pontja van	■ I; ☐ H;	f-nek pontosan két helyen van lokális szélsőértéke	☐ I; ■ H;

11. $f(x) = \dfrac{1}{1+e^{-x}}$ (valós függvény, a legbővebb halmazon értelmezve)

korlátos	■ I; ☐ H;	szigorúan monoton növő $\mathbb{R}$-en	■ I; ☐ H;
$\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = 0$	☐ I; ■ H;	$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 0$	■ I; ☐ H;
f-nek van lokális szélsőértéke	☐ I; ■ H;	f-nek az origóban inflexiós pontja van	■ I; ☐ H;

12. IMSC. $f(x) = x^2\big(3 + \cos(1/x)\big)$, ha $x \neq 0$, és $f(0) = 0$.
f deriválható az origóban ■ I; ☐ H; f' előjelet vált az origóban ☐ I; ■ H;
f-nek lokális minimuma van az origóban ■ I; ☐ H;

[1] A helyes megoldás előtti négyzetet **satírozza be**! Helyes válasz: 5 pont; helytelen vagy nem egyértelmű válasz: 0 pont.
[2] A helyes válasz előtti négyzetet **satírozza be**! Helyes válasz: 3 pont; nem egyértelmű válasz: 0 pont; helytelen válasz: -3 pont, azonban egy-egy feladat teljes pontszáma nem csökken nulla alá.

$\beta/1$, $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{ch(3x)}{sh(5x)} = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{\cancel{2}\, e^{3x}+e^{-3x}}{\cancel{2}(e^{5x}-e^{-5x})} = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{\overset{\to 0}{e^{-2x}}+\overset{\to 0}{e^{-8x}}}{1-\underset{\to 0}{e^{-10x}}} = \underline{0}$

$\beta/2 = \alpha/5$

$\beta/3$, $\left(\operatorname{arch}\left(\frac{1}{x}\right)\right)' = \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{1}{x}\right)^2-1}} \cdot \overset{=\left(\frac{1}{x}\right)'}{\frac{-1}{x^2}} = \frac{-1}{\sqrt{x^2-x^4}} = \underline{\frac{-1}{\sqrt{x^2(1-x^2)}}}$ (MA'S)

$\beta/4 = \alpha/7$

$\beta/5$ hasonló $\alpha/2$-hoz, de kicsit más lépés alkal meg:

$\lim\limits_{x\to-\frac{\pi}{2}+0} \underbrace{\left(x+\frac{\pi}{2}\right)}_{\to 0+} \cdot \underbrace{tg(x)}_{\to -\infty} = \lim\limits_{x\to-\frac{\pi}{2}+0} \frac{x+\pi/2}{ctg\, x} \overset{\frac{0}{0}}{\underset{L'H}{=}} \lim\limits_{x\to-\frac{\pi}{2}+0} \frac{1}{\left(\frac{-1}{\sin^2 x}\right)} = -\sin^2\left(-\frac{\pi}{2}\right) = \underline{-1}$

$\beta/6$, $f(x)=x^2$; $x_0=3$; $f(x_0)=9$; $f'(x)=2x$; $f'(x_0)=6$

$y_e(x) = f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0) = 9+6(x-3) = 6x-9 = \underline{3(2x-3)}$ (MA'S)

$\beta/7$, $\lim\limits_{x\to-1} \frac{\overset{\to -1}{x}}{\underset{\to 0+}{|1+x|}} = -\infty$, így $\lim\limits_{x\to-1} \operatorname{arctg}\left(\underbrace{\frac{x}{|1+x|}}_{y}\right) = \lim\limits_{y\to-\infty} \operatorname{arctg} y = \underline{-\frac{\pi}{2}}$

$\beta/8 \approx \alpha/10$ $\quad f(x) = 3\pi + 4\arcsin(3-2x)$

$-1 \le 3-2x \le +1 \Rightarrow 2 \ge x \ge 1 \Rightarrow D_f = [1,2]$

$f(1) = 3\pi + 4\frac{\pi}{2} = 5\pi$; $f(2) = 3\pi + 4\left(-\frac{\pi}{2}\right) = \pi \Rightarrow R_f = [\pi, 5\pi]$

$\left.\begin{array}{l}(3-2x)\downarrow \\ \arcsin\uparrow\end{array}\right\} \Rightarrow \arcsin(3-2x)\downarrow \Rightarrow f\downarrow \Rightarrow f$ injektív

$D_{f'} = \operatorname{Int} D_f = (1,2)$

$f'(x) = \frac{4\cdot(-2)}{\sqrt{1-(3-2x)^2}} < 0$; $\lim\limits_{x\to1+} f'(x) = \lim\limits_{x\to1+} \frac{-8}{\underbrace{\sqrt{1-\underbrace{(3-2x)^2}_{\to 1-}}}_{\to 0+}} = -\infty$

$\beta/9 \approx \alpha/11$ $\quad f(x)=\dfrac{x^2}{x+2}$; $\quad D_f=\mathbb{R}\setminus\{-2\}$

$$\lim_{x\to -2+}\frac{\overset{\to 4}{x^2}}{\underset{\to 0+}{x+2}}=+\infty$$

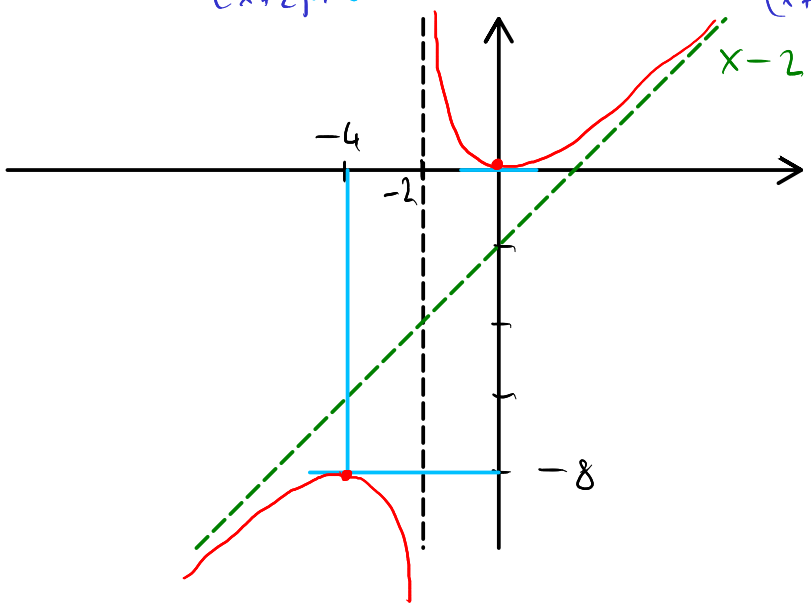
$f(-4)=-8$ $\qquad$ $f(0)=0$

$$f'(x)=\frac{2x(x+2)-x^2}{(x+2)^2}=\frac{x(x+4)}{(x+2)^2}$$

x	$x<-4$	-4	$-4<x<-2$	-2	$-2<x<0$	0	$0<x$
f'	$+$	0	$-$	$\nexists$	$-$	0	$+$
f	$\nearrow$	lok. max	$\searrow$	$\nexists$	$\searrow$	lok. min	$\nearrow$

$$f''(x)=\frac{(2x+4)(x+2)^{\cancel{2}}-(x^2+4x)2\cancel{(x+2)}}{(x+2)^{\cancel{4}\,3}}=\frac{8}{(x+2)^3}$$

x	$x<-2$	-2	$-2<x$
f''	$-$	$\nexists$	$+$
f	$\cap$	$\nexists$	$\cup$



$$f(x)=\frac{\overbrace{x^2-4}^{(x-2)(x+2)}+4}{x+2}=x-2+\frac{4}{x+2}$$

$\beta/10 = \alpha/8$

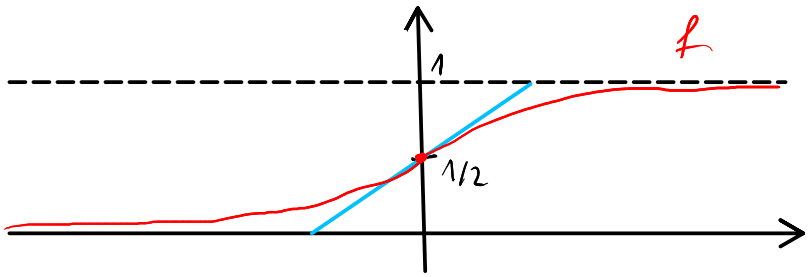
$\beta/11 \approx \alpha/9$ $\quad f(x)=\dfrac{1}{1+e^{-x}}$; $\quad \lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{1}{1+\underset{\to+\infty}{e^{-x}}}=\dfrac{1}{+\infty}=0$; $\quad \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{1+\underset{\to 0}{e^{-x}}}=1$

$$f'(x)=\frac{+e^{-x}}{(1+e^{-x})^2}>0 \Rightarrow f\uparrow \ \mathbb{R}\text{-en} \Rightarrow f \text{ kölcsönös } (R_f=(0,1))$$

$$f''(x)=\frac{-e^{-x}(1+e^{-x})^{\cancel{2}}-e^{-x}\cdot 2\cancel{(1+e^{-x})}\cdot(-e^{-x})}{(1+e^{-x})^{\cancel{4}\,3}}=\frac{e^{-2x}-e^{-x}}{(1+e^{-x})^3}=\frac{\overset{>0}{e^{-x}}(e^{-x}-1)}{\underset{>0}{(1+e^{-x})^3}}$$

$f''(x)=0 \iff x=0$

x	$x<0$	0	$0<x$
f''	$+$	0	$-$
f	$\cup$	fordulópont	$\cap$



$\beta/12 \approx \alpha/12$