**ANALÍZIS 1.** | **I. vizsga, kifejtős feladatok** | **2024. december 16.**

Mérnökinformatikus szak | $\alpha$ variáns | Munkaidő: 45 perc

**1. feladat (4+11=15 pont)**
*a*) Adjon elégséges feltételt arra, hogy az $f : I \to \mathbb{R}$ függvény konkáv legyen az $I$ intervallumon!
*b*) Határozza meg azokat a legbővebb intervallumokat, ahol az $f(x) = \ln(x^2 + 8x + 17)$ függvény konkáv!

a) Ha $\forall x \in I$ esetén $\exists f''(x) \le 0 \Longrightarrow f$ konkáv $I$-n. 4

b) $f'(x) = \dfrac{2x+8}{x^2+8x+17}$ ; 3

$$f''(x) = \frac{2(x^2+8x+17)-(2x+8)^2}{(x^2+8x+17)^2} = \frac{-2(x^2+8x+15)}{(x^2+8x+17)^2} = -2\,\frac{(x+3)(x+5)}{(x^2+8x+17)^2}$$

3 Szorzat 2

| $x$ | $x<-5$ | $-5$ | $-5<x<-3$ | $-3$ | $-3<x$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f''$ | $-$ | $0$ | $+$ | $0$ | $-$ |
| $f$ | $\cap$ | | $\cup$ | | $\cap$ |

2

$I_1 = (-\infty, -5]$

$I_2 = [-3, +\infty)$

**2. feladat (7+9=16 pont*)**
*a*) Mondja ki és igazolja a parciális integrálás módszerét
*b*) Számolja az $f(x) = \mathrm{arch}(x)$ függvény határozatlan integrálját!

a) T: $\int f'g\,dx = fg - \int fg'\,dx$ 3

B: $(fg)' = f'g + fg' \overset{\int}{\Longrightarrow} fg = \int f'g\,dx + \int fg'\,dx$ 4

b) $\int f(x)\,dx = \int \underset{\overset{\parallel}{x'}}{1}\cdot \mathrm{arch}\,x\,dx = x\,\mathrm{arch}\,x - \frac{1}{2}\int \frac{2x}{\sqrt{x^2-1}}\,dx =$ 5

$f' f^{-1/2}$ alak

$= x\,\mathrm{arch}\,x - \sqrt{x^2-1} + c$ 4

**3. feladat (14 pont*)**

Számolja ki az $\displaystyle\int_1^{\infty} \frac{2}{x^2+5x+4}\,dx$ integrált!

$$x^2+5x+4 = (x+4)(x+1)$$ 2

$$\frac{2}{x^2+5x+4} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x+4} \Rightarrow \quad 2 = (x+4)A + (x+1)B$$ 2

$$\left.\begin{array}{l} x=-1: \quad 2 = 3A \Rightarrow A = \frac{2}{3} \\ x=-4: \quad 2 = -3B \Rightarrow B = -\frac{2}{3} \end{array}\right\}$$ 3

$$\int_1^{\infty} \frac{2}{x^2+5x+4}\,dx = \lim_{\Omega\to\infty} \frac{2}{3}\int_1^{\Omega}\left(\frac{1}{x+1} - \frac{1}{x+4}\right)dx = \lim_{\Omega\to\infty} \frac{2}{3}\Big[\ln(x+1) - \ln(x+4)\Big]_1^{\Omega} =$$ 2

$$= \lim_{\Omega\to\infty} \frac{2}{3}\left[\ln\frac{x+1}{x+4}\right]_1^{\Omega} = \lim_{\Omega\to\infty} \frac{2}{3}\left(\ln \overset{\to 1}{\boxed{\frac{\Omega+1}{\Omega+4}}} - \ln\frac{2}{5}\right) = \underline{\frac{2}{3}\ln\frac{5}{2}}$$ 3 2

**4. feladat (6+4=10 pont*)**

a) Mondja ki az integrálszámítás második alaptételét!

b) Számolja ki az $F(x) = \displaystyle\int_2^x e^{t^3}\,dt$ függvény deriváltját!

a)

**Ⓣ *Az integrálszámítás II. alaptétele***

$$f \in R_{[a,b]}; \qquad F(x) = \int_a^x f(t)\,dt, \quad x \in [a,b]$$ 2

*1. Az integrálfüggvény folytonos $[a,b]$-ben.* 2

*2. Ha még $f$ folytonos is $x_0 \in (a,b)$-ben, akkor $F$ differenciálható $x_0$-ban és* 2

$$F'(x_0) = f(x_0).$$

b)

$t \mapsto e^{t^3}$ folytonos $\mathbb{R}$-en 1 $\Rightarrow F'(x) = e^{x^3}$ 3 $\forall x \in \mathbb{R}$.

(így integrálható)