1. feladat (4+11=15 pont)
a) Adjon elégséges feltételt arra, hogy az $f : I \to \mathbb{R}$ függvény konvex legyen az I intervallumon!
b) Határozza meg azokat a legbővebb intervallumokat, ahol az $f(x) = \ln(x^2 + 8x + 17)$ függvény konvex!

a) Ha $\forall x \in I$ esetén $\exists f''(x) \geq 0 \implies f$ konvex I-n. 4

b) $f'(x) = \dfrac{2x+8}{x^2+8x+17}$; 3

$$f''(x) = \frac{2(x^2+8x+17) - (2x+8)^2}{(x^2+8x+17)^2} = \frac{-2(x^2+8x+15)}{(x^2+8x+17)^2} = -2\frac{(x+3)(x+5)}{(x^2+8x+17)^2}$$

3 Szorzat → 2

x	$x<-5$	-5	$-5<x<-3$	-3	$-3<x$
f''	$-$	0	$+$	0	$-$
f	$\cap$		$\cup$		$\cap$

2 $I = [-5; -3]$

2. feladat (7+9=16 pont*)
a) Mondja ki és igazolja a parciális integrálás módszerét
b) Számolja az $f(x) = \text{arsh}(x)$ függvény határozatlan integrálját!

a) T: $\int f'g \, dx = fg - \int fg' \, dx$ 3

B: $(fg)' = f'g + fg' \overset{\int}{\implies} fg = \int f'g\,dx + \int fg'\,dx$ 4

b) $\int f(x)\,dx = \int \underset{x'}{1} \cdot \text{arsh}\, x \, dx = x \,\text{arsh}\, x - \frac{1}{2}\int \frac{2x}{\sqrt{x^2+1}}\,dx =$ 5 $f'f^{-1/2}$ alak

$= x\,\text{arsh}\, x - \sqrt{x^2+1} + c$ 4

3. feladat (14 pont*)

Számolja ki az $\displaystyle\int_1^{\infty} \frac{2}{x^2+4x+3}\,dx$ integrált!

$x^2+4x+3=(x+1)(x+3)$ 2

$$\frac{2}{x^2+4x+3}=\frac{A}{x+1}+\frac{B}{x+3} \Rightarrow 2=(x+3)A+(x+1)B$$ 2

$x=-1:\quad 2=2A \Rightarrow A=1$

$x=-3:\quad 2=-2B \Rightarrow B=-1$ 3

$$\int_1^{\infty}\frac{2}{x^2+4x+3}\,dx=\lim_{\Omega\to\infty}\int_1^{\Omega}\left(\frac{1}{x+1}-\frac{1}{x+3}\right)dx=\lim_{\Omega\to\infty}\Big[\ln(x+1)-\ln(x+3)\Big]_1^{\Omega}=$$ 2

$$=\lim_{\Omega\to\infty}\left[\ln\frac{x+1}{x+3}\right]_1^{\Omega}=\lim_{\Omega\to\infty}\left(\ln\boxed{\frac{\Omega+1}{\Omega+3}}^{\to 1}-\ln\frac{2}{4}\right)=\underline{\ln 2}$$ 3 2

4. feladat (6+4=10 pont*)

a) Mondja ki az integrálszámítás második alaptételét!

b) Számolja ki az $F(x)=\displaystyle\int_3^x e^{t^2}\,dt$ függvény deriváltját!

a)

Ⓣ ***Az integrálszámítás II. alaptétele***

$$f\in R_{[a,b]};\qquad F(x)=\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t,\quad x\in[a,b]$$ 2

1. Az integrálfüggvény folytonos $[a,b]$-ben. 2

2. Ha még f folytonos is $x_0\in(a,b)$-ben, akkor F differenciálható x_0-ban és
$$F'(x_0)=f(x_0).$$ 2

b)

$t\mapsto e^{t^2}$ folytonos $\mathbb{R}$-en $\Rightarrow$ $F'(x)=e^{x^2}$ $\forall x\in\mathbb{R}$. 1 3

(így integrálható)