2024.12.16.
Analízis 1. informatikusoknak, VD1-teszt
(45 perc, 55 pont)

címke névvel, Neptun kóddal

$\boldsymbol{\alpha}$ ■, $\boldsymbol{\beta}$ □

Válassza ki az egyetlen helyes megoldást![1] ($5 \times 5 = 25$ pont)

1. $\lim\limits_{x \to 0+} \dfrac{x \ln(x+1)}{\cos x - 1} = ?$

□ 0; □ $+\infty$; □ $-\infty$; ■ -2; □ 1; □ egyik sem.

2. A $z^7 + z^4 - 2z = 0$ egyenlet gyökeinek szorzata

□ 1; □ -1; □ -2; □ 2; ■ 0; □ más.

3. Hány valós torlódási pontja van az $a_n = \sqrt[n]{\sin\left(\frac{n\pi}{2}\right) 2^n + 3^n}$ sorozatnak?

□ 0; ■ 1; □ 2; □ 3; □ 4; □ más.

4. $f(x) = \operatorname{arctg} \dfrac{1}{x^2 - 1}$ függvény az 1 pontban

□ folytonos;
□ megszüntethető szakadással rendelkezik
■ véges ugrás típusú szakadással rendelkezik;
□ másodfajú szakadással rendelkezik;

5. Az $f(x) = x^2$, $x \in [0,1]$ függvény x tengely körüli megforgatásával nyert forgástest térfogata

□ 1; □ π; □ $\frac{\pi}{3}$; ■ $\frac{\pi}{5}$; □ 2π; □ más.

Minden állításról döntse el, hogy igaz (I) vagy hamis (H)![2] ($10 \times 3 = 30$ pont)

6. Az $\int_a^b \sin(x)\, dx$ integrál értéke 0,

ha $a = 0$, $b = \pi$. □ I; ■ H;
ha $a = -\pi$, $b = \pi$ ■ I; □ H;
ha $a = -\infty$, $b = \infty$. □ I; ■ H;

7. Tudjuk, hogy (a_n) kovergens, (b_n) korlátos, (c_n) pedig 0-hoz tartó sorozat. Ekkor

$(a_n b_n)$ konvergens. □ I; ■ H;
$(a_n c_n)$ korvergens. ■ I; □ H;
$(b_n c_n)$ konvergens. ■ I; □ H;

8. $f(x) = \operatorname{sh}(2 - 5x)$.

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ □ I; ■ H;
$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$ ■ I; □ H;
f konvex D_f-en □ I; ■ H;
f monoton csökken D_f-en ■ I; □ H;

[1] A helyes megoldás előtti négyzetet **satírozza be**! Helyes válasz: 5 pont; helytelen vagy nem egyértelmű válasz: 0 pont.

[2] A helyes válasz előtti négyzetet **satírozza be**! Helyes válasz: 3 pont; nem egyértelmű válasz: 0 pont; helytelen válasz: -3 pont, azonban egy-egy feladat teljes pontszáma nem csökken nulla alá.

1, $$\lim_{x\to 0+} \frac{x\ln(x+1)}{\cos x - 1} \overset{\text{"}\frac{0}{0}\text{"}}{\underset{L'H}{=}} \lim_{x\to 0+} \frac{\ln(x+1)+\frac{x}{x+1}}{-\sin x} \overset{\text{"}\frac{0}{0}\text{"}}{\underset{L'H}{=}} \lim_{x\to 0+} \frac{\frac{1}{x+1}+\frac{x+1-x}{(x+1)^2}}{-\cos x} = -2$$

2, $z^7+z^4-2z = z(z^6+z^3-2) = 0 \implies z=0$ gyök $\implies$ Gyökök szorzata 0.

3, $$\frac{1}{2}\cdot 3^n \underset{\uparrow}{\le} -2^n+3^n \le \sin\left(\frac{n\pi}{2}\right)\cdot 2^n+3^n \le 2^n+3^n \le 2\cdot 3^n$$

ha n elég nagy

$$3 \longleftarrow \frac{3}{\sqrt[n]{2}} = \sqrt[n]{\tfrac{1}{2}3^n} \le a_n \le \sqrt[n]{2\cdot 3^n} = \sqrt[n]{2}\cdot 3 \longrightarrow 3$$

$\implies \exists \lim_{n\to\infty} a_n = 3 \implies$ 1 db torlódási pont van.

4, $$\lim_{x\to 1\pm} \operatorname{arctg} \overbrace{\frac{1}{\underbrace{x^2-1}_{0\pm}}}^{\pm\infty} = \pm\frac{\pi}{2} \implies$$ elsőfajú, véges ugrás

5, $$V = \pi\int_0^1 f^2(x)\,dx = \pi\int_0^1 x^4\,dx = \pi\left[\frac{x^5}{5}\right]_0^1 = \frac{\pi}{5}$$

6, $\int \sin x\,dx = -\cos x + C$; $\int_0^{\pi} \sin x\,dx = \left[-\cos x\right]_0^{\pi} = 2 \ne 0$

$\sin x$ páratlan, így $\int_{-a}^{+a} \sin x\,dx = 0$ $\forall a\in\mathbb{R}$ esetén.

$$\int_{x_0}^{+\infty} \sin x\,dx = \lim_{\Omega\to\infty}\int_{x_0}^{\Omega} \sin x\,dx = \lim_{\Omega\to\infty}\left(-\cos\Omega+\cos x_0\right) = \nexists \implies \int_{-\infty}^{\infty} \sin x\,dx = \nexists$$

7, $(a_n; b_n)$ nem konvergens, legyen pl. $a_n = 1$, $b_n = (-1)^n$

$$\lim_{n\to\infty} a_n c_n = \underbrace{\lim_{n\to\infty} a_n}_{=A\in\mathbb{R}} \cdot \underbrace{\lim_{n\to\infty} c_n}_{0} = A\cdot 0 = 0$$

$\exists \lim_{n\to\infty} b_n c_n = 0$, mert b_n korlátos, $c_n \to 0$

8)

$$\lim_{x\to\pm\infty} \operatorname{sh}(\underbrace{2-5x}_{\to\mp\infty}) = \mp\infty$$

$$\left.\begin{array}{ll} g: x \mapsto 2-5x & \downarrow \\ h: x \mapsto \operatorname{sh} x & \uparrow \end{array}\right\} \Longrightarrow f = h\circ g \downarrow$$ (szigorúan monoton csökken $\mathbb{R}$-en)

(vagy $f'(x) = -5\operatorname{ch}(2-5x) < 0$)

$$f''(x) = +25\operatorname{sh}(2-5x) \begin{cases} \geq 0, \text{ ha } x \leq \frac{2}{5} \\ \leq 0, \text{ ha } x \geq \frac{2}{5} \end{cases} \Longrightarrow$$ f nem konvex az egész értelmezési tartományán

A β változatban csak a kérdések és válaszok sorrendje más.

2024.12.16.
Analízis 1. informatikusoknak, VD1-teszt
(45 perc, 55 pont)

címke névvel, Neptun kóddal

$\boldsymbol{\alpha}$ ☐, $\boldsymbol{\beta}$ ■

Válassza ki az egyetlen helyes megoldást![1] **($5 \times 5 = 25$ pont)**

1. A $z^7 + z^4 - 2z = 0$ egyenlet gyökeinek szorzata

☐ 1; ☐ 2; ■ 0; ☐ -1; ☐ -2; ☐ más.

2. $f(x) = \operatorname{arctg} \dfrac{1}{x^2 - 1}$ függvény az 1 pontban

☐ folytonos;
■ véges ugrás típusú szakadással rendelkezik;
☐ megszüntethető szakadással rendelkezik;
☐ másodfajú szakadással rendelkezik;

3. Hány valós torlódási pontja van az $a_n = \sqrt[n]{\sin\left(\frac{n\pi}{2}\right) 2^n + 3^n}$ sorozatnak?

☐ 4; ☐ 3; ☐ 2; ■ 1; ☐ 0; ☐ más.

4. $\displaystyle\lim_{x \to 0+} \frac{x \ln(x+1)}{\cos x - 1} = ?$

■ -2; ☐ 1; ☐ 0; ☐ $+\infty$; ☐ $-\infty$; ☐ egyik sem.

5. Az $f(x) = x^2$, $x \in [0,1]$ függvény x tengely körüli megforgatásával nyert forgástest térfogata

☐ $\frac{\pi}{3}$; ■ $\frac{\pi}{5}$; ☐ 2π; ☐ 1; ☐ π; ☐ más.

Minden állításról döntse el, hogy igaz (I) vagy hamis (H)![2] **($10 \times 3 = 30$ pont)**

6. Tudjuk, hogy (a_n) kovergens, (b_n) korlátos, (c_n) pedig 0-hoz tartó sorozat. Ekkor

$(a_n b_n)$ konvergens. ☐ I; ■ H;
$(b_n c_n)$ konvergens. ■ I; ☐ H;
$(a_n c_n)$ korvergens. ■ I; ☐ H;

7. Az $\int_a^b \sin(x)\, dx$ integrál értéke 0,

ha $a = -\pi$, $b = \pi$ ■ I; ☐ H;
ha $a = 0$, $b = \pi$. ☐ I; ■ H;
ha $a = -\infty$, $b = \infty$. ☐ I; ■ H;

8. $f(x) = \operatorname{sh}(2 - 5x)$.

$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ ☐ I; ■ H;
$\lim_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$ ■ I; ☐ H;
f monoton csökken D_f-en ■ I; ☐ H;
f konvex D_f-en ☐ I; ■ H;

[1] A helyes megoldás előtti négyzetet **satírozza be**! Helyes válasz: 5 pont; helytelen vagy nem egyértelmű válasz: 0 pont.
[2] A helyes válasz előtti négyzetet **satírozza be**! Helyes válasz: 3 pont; nem egyértelmű válasz: 0 pont; helytelen válasz: -3 pont, azonban egy-egy feladat teljes pontszáma nem csökken nulla alá.