2023.12.18.
Analízis 2. informatikusoknak, VD1-teszt
(45 perc, 55 pont)

címke névvel, Neptun kóddal

Válassza ki az egyetlen helyes megoldást![1] **($5 \times 5 = 25$ pont)**

1. Az $a_n = \left(\dfrac{2n^2-2}{2n^2+3}\right)^n$ sorozat határértéke

☐ e^{-5}; ☐ $e^{-5/2}$; ■ 1; ☐ 0; ☐ egyik sem.

2. $\operatorname{Re}\left(\dfrac{2+i}{1-i}\right) = ?$

☐ 2; ■ $\dfrac{1}{2}$; ☐ -1; ☐ $-\dfrac{1}{2}$; ☐ $\dfrac{3}{2}$; ☐ más.

3. Az $a_n = \sqrt[n]{5^n + 3^n \cos\dfrac{n\pi}{2}}$ sorozat torlódási pontjainak száma

☐ 0; ■ 1; ☐ 2; ☐ 3; ☐ 4; ☐ más.

4. Melyik állítás igaz az $f(x) = \dfrac{x}{\sin x}$ függvény szakadásaira? (D_f a lehető legbővebb valós halmaz.)

☐ f-nek csak elsőfajú szakadása van; ☐ f-nek csak másodfajú szakadása van;
☐ f-nek nincs szakadása; ☐ f-nek ugyanannyi első és másodfajú szakadása van;
■ egyik előző állítás sem igaz.

5. $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{4x+1} - 2\sqrt{x}}{\sqrt{9x-2} - 3\sqrt{x}} = ?$

☐ $\dfrac{2}{3}$; ☐ $-\dfrac{2}{3}$; ☐ $-\dfrac{3}{8}$; ☐ $-\dfrac{1}{2}$; ■ $-\dfrac{3}{4}$; ☐ más.

Minden állításról döntse el, hogy igaz (I) vagy hamis (H)![2] **($10 \times 3 = 30$ pont)**

6. $z^5 - 8iz^2 = 0$ ($z \in \mathbb{C}$)

Az egyenletnek minden gyöke 2 abszolút értékű	☐ I;	■ H;
Az egyenletnek van tisztán képzetes, nem nulla gyöke	■ I;	☐ H;
Az egyenletnek pontosan 5 különböző gyöke van	☐ I;	■ H;

7. *a*) Az (a_n) sorozat korlátos. *b*) Az (a_n) sorozat konvergens. *c*) Az (a_n) sorozat monoton.

a) és *b*) maga után vonja *c*)-t.	☐ I;	■ H;
b) és *c*) maga után vonja *a*)-t.	■ I;	☐ H;
c) és *a*) maga után vonja *b*)-t.	■ I;	☐ H;

8. $f(x) = \dfrac{\operatorname{arctg}(x^2+x)}{x^2-1}$, D_f a lehető legbővebb valós halmaz.

f az értelmezési tartományán folytonos	■ I;	☐ H;
$\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = 1$	☐ I;	■ H;
f-nek van megszüntethető szakadása	■ I;	☐ H;
f-nek van másodfajú szakadása	■ I;	☐ H;

[1] A helyes megoldás előtti négyzetet **satírozza be**! Helyes válasz: 5 pont; helytelen vagy nem egyértelmű válasz: 0 pont.

[2] A helyes válasz előtti négyzetet **satírozza be**! Helyes válasz: 3 pont; nem egyértelmű válasz: 0 pont; helytelen válasz: -3 pont, azonban egy-egy feladat teljes pontszáma nem csökken nulla alá.

1,

$$a_n = \left(\frac{2n^2-2}{2n^2+3}\right)^n = \sqrt[n]{b_n}, \text{ ahol}$$

$$b_n = \left(\frac{2n^2-2}{2n^2+3}\right)^{n^2} = \frac{\left(1-\frac{1}{n^2}\right)^{n^2}}{\left(1+\frac{3/2}{n^2}\right)^{n^2}} \xrightarrow{n\to\infty} \frac{e^{-1}}{e^{3/2}} = e^{-5/2}$$

Ha $n > N_0$:

$$0 < e^{-5/2} - \varepsilon < b_n < e^{-5/2} + \varepsilon$$

$$\sqrt[n]{e^{-5/2}-\varepsilon} < \sqrt[n]{b_n} = a_n < \sqrt[n]{e^{-5/2}+\varepsilon}$$

$$\downarrow \qquad \downarrow \qquad \downarrow$$

$$1 \qquad \underline{1} \qquad 1$$

2,

$$\frac{2+i}{1-i} = \frac{(2+i)(1+i)}{(1-i)(1+i)} = \frac{2-1+2i+i}{1+1} = \frac{1+3i}{2}; \quad \mathrm{Re}\left(\frac{2+i}{1-i}\right) = \underline{\frac{1}{2}}$$

3,

$$a_n = \sqrt[n]{5^n + 3^n \cos\left(\frac{n\pi}{2}\right)} = \begin{cases} \sqrt[n]{5^n+3^n}, & \text{ha } n = 4k \\ \sqrt[n]{5^n} + 0 = 5, & \text{ha } n = 2k+1 \\ \sqrt[n]{5^n - 3^n}, & \text{ha } n = 4k+2 \end{cases}$$

$k \in \mathbb{Z}$

Ha $n > N_0$:

$$\frac{1}{2}5^n \le 5^n \pm 3^n \le 2\cdot 5^n$$

$$\sqrt[n]{\frac{1}{2}}\cdot 5 \le \sqrt[n]{5^n \pm 3^n} \le \sqrt[n]{2}\cdot 5$$

$$\downarrow n\to\infty \qquad\qquad \downarrow n\to\infty$$

$$5 \qquad\qquad 5$$

Tehát $\exists \lim\limits_{n\to\infty} a_n = 5 \Rightarrow$ <u>1 db torlódási pont van</u>

4, $f(x) = \dfrac{x}{\sin x}$; $\sin x \neq 0 \iff x \neq k\pi \ (k \in \mathbb{Z})$

$D_f = \mathbb{R} \setminus \{k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$; f a D_f-en folytonos

$\lim\limits_{x \to 0} f(x) = 1 \implies x=0$-ban elsőfajú szakadás van (1 db)

$\lim\limits_{x \to k\pi \pm 0} f(x) = \pm\infty$ vagy $\mp\infty$, ha $k \neq 0$

$\implies$ végtelen sok másodfajú szakadás van

5, $$\frac{\sqrt{4x+1} - 2\sqrt{x}}{\sqrt{9x-2} - 3\sqrt{x}} = \frac{\cancel{4x}+1 - \cancel{2^2 x}}{\cancel{9x}-2 - \cancel{3^2 x}} \cdot \frac{\sqrt{9x-2} + 3\sqrt{x}}{\sqrt{4x+1} + 2\sqrt{x}} = \frac{-1}{2} \cdot \frac{\sqrt{9 - \frac{2}{x}} + 3}{\sqrt{4 - \frac{1}{x}} + 2}$$

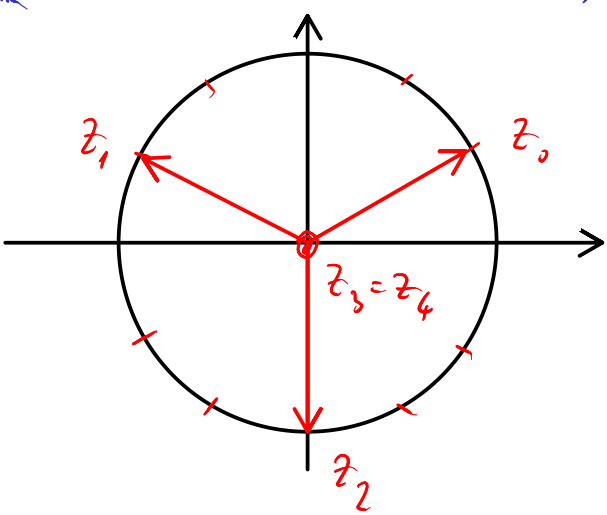
$\frac{2}{x} \to 0$, $\frac{1}{x} \to 0$

$$a_n \xrightarrow{n \to \infty} -\frac{3+3}{2(2+2)} = \underline{-\frac{3}{4}}$$

6, $z^5 - 8iz^2 = 0$; $z^2(z^3 - 8i) = 0$; $z = 0$, vagy $z^3 = 8i = 8e^{i\frac{\pi}{2}}$

$z_k = 2 \cdot e^{i\left(\frac{\pi}{6} + k\frac{2\pi}{3}\right)}$ $(k = 0, 1, 2)$; $z_0 = 2e^{i\frac{\pi}{6}}$; $z_1 = 2e^{i\frac{5\pi}{6}}$;

$z_2 = 2e^{i\frac{3\pi}{2}} = -2i$; $z_3 = z_4 = 0$



7, $(-1)^n \cdot \frac{1}{n}$ korlátos, konv., de nem monoton

(a_n) konvergens $\implies (a_n)$ korlátos

(a_n) monoton, korlátos $\implies$ konvergens

8, $f(x) = \dfrac{\operatorname{arctg}(x^2+x)}{x^2-1}$; $x^2-1 = (x+1)(x-1) \neq 0$

$D_f = \mathbb{R} \setminus \{+1, -1\}$

f a D_f-en folytonos

$$\lim_{x\to -1} f(x) = \lim_{x\to -1} \frac{\operatorname{arctg}(x^2+x)}{x^2-1} \overset{\frac{0}{0}}{\underset{L'H}{=}} \lim_{x\to -1} \frac{\left(\frac{2x+1}{1+(x^2+x)^2}\right)}{2x} = \frac{-1}{-2} = \frac{1}{2}$$

$\Rightarrow$ f-nek a -1-ben elsőfajú, megszüntethető szakadása van.

$$\lim_{x\to +\infty} \frac{\overbrace{\operatorname{arctg}(x^2+x)}^{1\text{ korlátos}}}{\underbrace{x^2-1}_{\to\infty}} = 0 \neq 1$$

$$\lim_{x\to +1\pm 0} \frac{\overbrace{\operatorname{arctg}(x^2+x)}^{\to \operatorname{arctg} 2 > 0}}{\underbrace{x^2-1}_{\to 0\pm 0}} = \pm\infty$$ Másodfajú szakadás