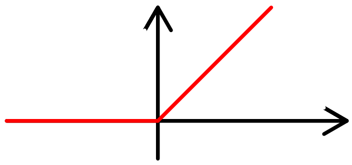
1. feladat (4+11=15 pont)

a) Megadható-e két $\mathbb{R}$-en értelmezett, valós értékű függvény úgy, hogy ők maguk nem deriválhatóak az origóban, de szorzatuk igen? (Adjon példát, vagy cáfolja a kijelentést!)

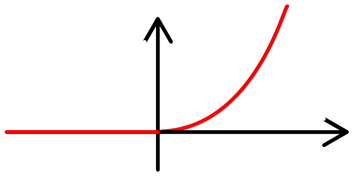
b) Számolja ki az $f(x) = (x-2)^3(x+4)^2$ függvény minimumát, illetve maximumát a $[-3, 3]$ intervallumon!

a, $f(x) = g(x) = \begin{cases} 0, & \text{ha } x \le 0 \\ x, & \text{ha } x \ge 0 \end{cases}$



nem deriválha-tóak 0-ban

$(f \cdot g)(x) = \begin{cases} 0, & \text{ha } x \le 0 \\ x^2, & \text{ha } x \ge 0 \end{cases}$



$\exists (f g)'(x) = \begin{cases} 0, & \text{ha } x \le 0 \\ 2x, & \text{ha } x \ge 0 \end{cases}$

∃ példa: 1   Helyes példa: 3

b, $\left.\begin{array}{l} f \text{ folytonos} \\ [-3;+3] \text{ kompakt} \end{array}\right\} \xrightarrow[\text{2. tétel}]{\text{Weierstrass}}$ f-nek ∃ minimuma, maximuma $[-3;+3]$-on 1

$f'(x) = 3(x-2)^2(x+4)^2 + 2(x-2)^3(x+4) = (x-2)^2(x+4)\big(\underbrace{3(x+4)+2(x-2)}_{5x+12-4=5x+8}\big)$ 3

$f'(x) = 0 \iff x = 2 \lor \underbrace{x = -4}_{\notin[-3;+3]} \lor x = -\frac{8}{5}$ 2

Vizsgálandó: végpontok, és ahol $f'(x) = 0$

$f(-3) = (-5)^3 \cdot 1^2 = -125$ 1

Ezt nem kell kiszámolni

$f\left(-\frac{8}{5}\right) = \left(-\frac{18}{5}\right)^3 \left(\frac{12}{5}\right)^2$ 1 $= -3.6^3 \cdot 2.4^2 \approx -268.7 \longleftarrow$ minimum $[-3,+3]$-on

$f(2) = 0$ 1

$f(3) = 1 \cdot 7^2 = 49$ 1 $\longleftarrow$ maximum $[-3,+3]$-on

2. feladat (4+~~8~~ 12=16 pont*)

a) Ismertesse a Newton-Leibniz formulát!

b) Számolja ki az $\int_0^{\pi} x \cdot \sin(x)\,dx$ integrált!

a)

Ⓣ ***Newton–Leibniz-tétel***

Ha $f \in R_{[a,b]}$ (1) *és itt létezik primitív függvénye* (F), (1) *azaz* $x \in [a,b]$ *-re* $F'(x) = f(x)$ *, akkor*

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = F(b) - F(a) = F(x)\big|_a^b \quad (2)$$

b)

$$\int_0^{\pi} \underset{u}{x}\ \underset{v'}{\sin(x)}\,dx = \left[-x\cos x\right]_0^{\pi} + \int_0^{\pi} 1\cdot\cos x\,dx \ (4) = (\pi - 0) \ (2) + \left[\sin x\right]_0^{\pi} \ (2) = \pi \ (2)$$

$u' = 1 \quad v = -\cos x$ (2)

3. feladat (4+10=14 pont*)

a) Hogy számoljuk ki az $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ függvény x tengely körüli megforgatásával nyet forgástest térfogatát?

b) Számolja ki az $f(x) = x^2 - 1$, $x \in [1,2]$ függvény x tengely körüli megforgatásával nyert forgástest térfogatát!

a) $V = \pi \int_a^b f^2(x)\,dx$ (4)

b) $V = \pi \int_1^2 (x^2-1)^2\,dx$ (2) $= \pi \int_1^2 (x^4 - 2x^2 + 1)\,dx$ (2) $= \pi \left[\frac{x^5}{5} - \frac{2x^3}{3} + x\right]_1^2$ (4) $=$

$= \pi\left(\frac{31}{5} - \frac{14}{3} + 1\right)$ (2) $= \pi\,\frac{93-70+15}{15} = \pi\,\frac{38}{15}$

4. feladat (2+8=10 pont*)

a) Írja fel $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$ esetén az $f^{\alpha}(x)f'(x)$ függvény egy primitív függvényét!

b) Határozza meg az $f(x) = \dfrac{\sqrt{\ln(x)}}{x}$ függvény egy primitív függvényét!

a) $\dfrac{f^{\alpha+1}(x)}{\alpha+1}$ (2)

b) $f(x) = \ln^{1/2}(x) \cdot \ln'(x)$ (4) $\Longrightarrow \quad F(x) = \dfrac{\ln^{3/2}(x)}{3/2} = \dfrac{2}{3}\ln^{3/2}(x)$ (6)

A ∗*-os feladatokból legalább 14 pontot kell elérni.*