1. feladat (4+11=15 pont)
a) Adjon elégséges feltételt arra, hogy az $f : I \to \mathbb{R}$ függvény konkáv legyen az I intervallumon!
b) Határozza meg azokat a legbővebb intervallumokat, ahol az $f(x) = x^2 e^{2x}$ függvény konkáv!

Mo. *a*) Ha f kétszer differenciálható az I intervallumon, és $f''(x) \le 0$ ha $x \in I$, akkor f konkáv.

b) $f'(x) = (2x + 2x^2)e^{2x}$ **(2p)** , $f''(x) = (2 + 8x + 4x^2)e^{2x} = 0$ **(3p)** , ha $x = -1 \pm \frac{\sqrt{2}}{2}$ **(3p)** így a függvény konkáv a $\left[-1 - \frac{\sqrt{2}}{2}, -1 + \frac{\sqrt{2}}{2}\right]$ intervallumon **(3p)** .

---

2. feladat (6+7=13 pont*)
a) Mondja ki és igazolja a parciális integrálás módszerét
b) Számolja az $f(x) = (3x + 4)\,\mathrm{ch}(2x - 1)$ függvény határozatlan integrálját!

Mo. *a*) $\int f'g = fg - \int fg'$ **(2p)** , mert a szorzatfüggvény deriválási szabálya alapján

$$fg = \int (fg)' = \int f'g + fg' = \int f'g + \int fg' \qquad \textbf{(4p)}$$

b) $$\int (3x+4)\,\mathrm{ch}(2x-1)dx \overset{\textbf{(4p)}}{=} (3x+4)\frac{\mathrm{sh}(2x-1)}{2} - \frac{3}{2}\int \mathrm{sh}(2x-1)dx =$$
$$\overset{\textbf{(3p)}}{=} (3x+4)\frac{\mathrm{sh}(2x-1)}{2} - \frac{3}{4}\,\mathrm{ch}(2x-1) + c$$

---

3. feladat (12 pont*)
Számolja ki az $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x^2-1}}$, $x \in [2, 3]$ görbe x tengely körüli megforgatásával keletkezett forgástest térfogatát!

Mo. $V = \pi \displaystyle\int_2^3 \frac{1}{x^2-1}dx$ **(3p)** . Ekkor $\dfrac{1}{x^2-1} = \dfrac{A}{x-1} + \dfrac{B}{x+1}$ **(2p)** , itt $A = \frac{1}{2}$, $B = -\frac{1}{2}$ **(2p)** , így

$$V \overset{\textbf{(1p)}}{=} \frac{\pi}{2}\int_2^3 \frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+1}dx \overset{\textbf{(2p)}}{=} \frac{\pi}{2}\left[\ln|x-1| - \ln|x+1|\right]_2^3 \overset{\textbf{(2p)}}{=} \frac{\pi(\ln 2 - \ln 4 + \ln 3)}{2}$$

---

4. feladat (6+9=15 pont*)
a) Határozza meg $\alpha > 0$ esetén a $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{x^\alpha}$ improprius integrált, amennyiben konvergens!
b) Számolja ki az $\displaystyle\int_0^2 \frac{3}{\sqrt{4-2x}}\,dx$ integrált!

Mo. *a*) ha $\alpha \ne 1$, akkor $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{x^\alpha}dx = \lim_{\varepsilon\to 0+}\left[\frac{x^{1-\alpha}}{1-\alpha}\right]_\varepsilon^1 = \begin{cases} \frac{1}{1-\alpha}, & \text{ha } \alpha < 1 \\ \infty & \text{ha } \alpha > 1 \end{cases}$ **(4p)**

Ha $\alpha = 1$, akkor $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{x}dx = \lim_{\varepsilon\to 0+}\left[\ln x\right]_\varepsilon^1 = \infty$ **(2p)** .

b) $$\int_0^2 \frac{3}{\sqrt{4-2x}}\,dx \overset{\textbf{(6p)}}{=} 3\lim_{\varepsilon\to 0+}\left[-\sqrt{4-2x}\right]_0^{2-\varepsilon} \overset{\textbf{(3p)}}{=} 6$$

A $*$-os feladatokból legalább 14 pontot kell elérni.