1. feladat (6+9=15 pont)
a) Mondja ki és igazolja a differenciálható függvény lokális szélsőértékének létezésére vonatkozó szükséges feltételt!
b) Határozza meg az $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - \frac{3}{2}x^2 - 18x + 2$ függvény lokális szélsőértékhelyeit!

Mo. *a*) Ha f differenciálható az x_0 pontban, és itt lokális szélsőértéke van, akkor $f'(x_0) = 0$. **(2p)**
Ha x_0-ban lokális minimum van, akkor $h > 0$ esetén $\frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} \geq 0$, **(1p)** $h < 0$ esetén $\frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} \leq 0$ **(1p)** , tehát

$$0 \geq \lim_{h \to 0-} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} = f'(x_0) = \lim_{h \to 0+} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} \geq 0 \quad \Longrightarrow \quad f'(x_0) = 0 \quad (\mathbf{2p})$$

b) $f'(x) = x^2 - 3x - 18 = (x-6)(x+3) = 0$ **(3p)** , tehát lehetséges lokális szélsőértékhelyek: $x = 6$, $x = -3$ **(2p)** . Másrészt f' előjelet vált ezekben a pontokban **(2p)** , tehát itt valóban lokális szélsőértékhely van **(2p)** .

---

2. feladat (4+5+ 6=15 pont*)
a) Írja fel folytonos $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ és $\alpha \in \mathbb{R}$ esetén az $f^\alpha(x)f'(x)$ függvény határozatlan integrálját!
b) $\int \cos x \sin x \, dx = ?$ *c*) $\int_0^\pi |\cos x \sin x| \, dx = ?$

Mo. *a*) Ha $\alpha \neq -1$, akkor $\int f^\alpha(x)f'(x)dx = \frac{f^{\alpha+1}}{\alpha+1} + c$ **(2p)** ,
$\alpha = -1$ esetén $\int \frac{f'(x)}{f(x)}dx = \ln|f(x)| + c$ **(2p)**
b) $\int \cos x \sin x \, dx = \frac{\sin^2 x}{2} + c$ **(5p)** , vagy $\int \cos x \sin x \, dx = \int \frac{\sin(2x)}{2} \, dx = \frac{-\cos(2x)}{4} + c$ **(5p)** . (A két eredmény konstansban tér el, $2\sin^2 x = 1 - \cos(2x)$.)
c) $\int_0^\pi |\cos x \sin x| dx \overset{(\mathbf{3p})}{=} \int_0^{\pi/2} \cos x \sin x dx - \int_{\pi/2}^\pi \cos x \sin x dx \overset{(\mathbf{1p})}{=} \left[\frac{\sin^2 x}{2}\right]_0^{\pi/2} - \left[\frac{\sin^2 x}{2}\right]_{\pi/2}^{\pi} \overset{(\mathbf{2p})}{=} 1$

---

3. feladat (10 pont*)
Számolja ki az $\int x^2 \ln x dx$ integrált!

Mo. Parciális integrálással: $\int x^2 \ln x dx \overset{(\mathbf{4p})}{=} \frac{x^3}{3} \ln x - \int \frac{x^3}{3} \cdot \frac{1}{x} \overset{(\mathbf{3p})}{=} \frac{x^3}{3} \ln x - \int \frac{x^2}{3} dx \overset{(\mathbf{3p})}{=} \frac{x^3}{3} \ln x - \frac{x^3}{9} + c$

---

4. feladat (5+10=15 pont*)
a) Milyen $\alpha > 0$ esetén teljesül, hogy $\int_0^\infty \frac{1}{x^\alpha} dx < \infty$? Válaszát indokolja! (Tanult eredményekre szabad hivatkozni.)
b) Számolja ki az $\int_0^\infty \frac{3x+8}{x^2+5x+6} \, dx$ integrált!

Mo. *a)* $\int_0^\infty \frac{1}{x^\alpha}dx = \int_0^1 \frac{1}{x^\alpha}dx + \int_1^\infty \frac{1}{x^\alpha}dx$ **(2p)** , mindhárom integrál pozitív (vagy $+\infty$), az első integrál $0 < \alpha < 1$ esetén véges, a második $\alpha > 1$ esetén **(2p)** , tehát nincs olyan $\alpha > 0$ érték, melyre az eredeti integrál véges lenne **(1p)** .

b) $\frac{3x+8}{x^2+5x+6} = \frac{A}{x+2} + \frac{B}{x+3}$ **(2p)** , tehát $A + B = 3$, $3A + 2B = 8$, így $A = 2, B = 1$ **(2p)** .

$$\int_0^\infty \frac{3x+8}{x^2+5x+6}\,dx \overset{\textbf{(2p)}}{=} \lim_{\omega\to\infty} \int \frac{2}{x+2} + \int \frac{1}{x+3}dx \overset{\textbf{(2p)}}{=} \lim_{\omega\to\infty} [2\ln(x+2) + \ln(x+3)]_0^\omega \overset{\textbf{(2p)}}{=} \infty$$

A $*$-os feladatokból legalább 14 pontot kell elérni.