1. feladat (4+11=15 pont)

a) Mondja ki a rendőrelvet!

b) Adja meg az $a_n = \sqrt[n]{n(-3)^n + 2^{n+1} - n^3}$ sorozat torlódási pontjainak halmazát, limesz inferiorját és limesz szuperiorját!

a) Ha $a_n \to A$, $b_n \to A$, és $\forall n \in \mathbb{N}: a_n \le c_n \le b_n \Rightarrow c_n \to A$ 4

b) Ha n páros 1, $(-3)^n = 3^n$, így

$$\frac{\sqrt[n]{n}}{\sqrt[n]{2}} \cdot 3 = \sqrt[n]{n \cdot 3^n - \frac{1}{2} n 3^n} \le a_n = \sqrt[n]{n \cdot 3^n + 2^{n+1} - n^3} \le \sqrt[n]{n 3^n + n \cdot 3^n} =$$

2 2 $n > N_0$

$\downarrow 3$ Rendőr-elv alapján $a_{2k} \to 3$ 1 $= \sqrt[n]{n} \cdot \sqrt[n]{2} \cdot 3 \longrightarrow 3$

Ha n páratlan, $(-3)^n = -3^n$; $\sqrt[n]{-x} = -\sqrt[n]{x}$

2 $$-\sqrt[n]{n} \cdot 3 = -\sqrt[n]{n \cdot 3^n} \le a_n = -\sqrt[n]{n \cdot 3^n - 2^{n+1} + n^3} \le -\sqrt[n]{\frac{n}{2} \cdot 3^n} = -\frac{\sqrt[n]{n}}{\sqrt[n]{2}} \cdot 3$$

$\downarrow$ Ha $n > N_0$ $\downarrow$

$-3 \Rightarrow a_{2k+1} = -3$ -3

Torlódási pontok: $S = \{-3; +3\}$ 1; $\limsup a_n = +3$ 1; $\liminf a_n = -3$ 1

2. feladat (4+7=11 pont*)

a) Ismertesse a Newton-Leibniz formulát!

b) Számolja ki az $\int_0^{\pi/2} \sin^2(x) \cos(x)\, dx$ integrált!

a) Ha $f \in R[a,b]$ 1 és $F' = f$ $[a,b]$-n 1, akkor $\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$. 2

b) $$\int_0^{\pi/2} \sin^2(x) \cos(x)\, dx \overset{f^2 f' \text{ alak}}{=} \left[\frac{\sin^3(x)}{3}\right]_0^{\pi/2} = \frac{1}{3}$$ 5 2

3. feladat (12 pont*)

$t = \sqrt{x+1}$ helyettesítéssel számolja ki az

$$\int \frac{\sqrt{x+1}-2}{x-3}\,dx$$

integrált! ($x \geq -1$, $x \neq 3$)

$$\int \frac{\sqrt{x+1}-2}{x-3}\,dx = \int \frac{t-2}{t^2-1-3}\cdot 2t\,dt = \int \frac{t-2}{\underbrace{t^2-4}_{(t+2)(t-2)}}\,2t\,dt =$$

$t=\sqrt{x+1}$ 1

$x = t^2-1$ 1; $dx = 2t\,dt$ 1

2

$$= \int \frac{2t+4-4}{t+2}\,dt = \int \left(2 - \frac{4}{t+2}\right)dt = 2t - 4\ln|t+2| + c =$$

2 3

$$= 2\sqrt{x+1} - 4\ln\left(\sqrt{x+1}+2\right) + c$$ 2

4. feladat (6+11=17 pont*)

a) Mondja ki és igazolja a parciális integrálás módszerét!!

b) Számolja ki az $\displaystyle\int_0^\infty (2x+3)e^{-x}$ integrált!

a) T: $\int u v'\,dx = uv - \int u'v\,dx$ 2

B.: $(uv)' = u'v + uv'$

$uv' = (uv)' - u'v \quad / \int$

$\int uv'\,dx = uv - \int u'v$

4

b) $$\int_0^\infty (2x+3)e^{-x}\,dx = \lim_{\Omega\to\infty} \int_0^\Omega \underbrace{(2x+3)}_{u}\,\underbrace{e^{-x}}_{v'}\,dx =$$ 2

$u' = 2 \qquad v = -e^{-x}$

$$= \lim_{\Omega\to\infty}\left(\left[(2x+3)(-e^{-x})\right]_0^\Omega - \int_0^\Omega 2(-e^{-x})\,dx\right) =$$ 4

$$= \lim_{\Omega\to\infty}\left[-(2x+3)e^{-x} - 2e^{-x}\right]_0^\Omega = 0 - (-3-2) = 5$$ 3 2

A $*$-os feladatokból legalább 14 pontot kell elérni.