

1. feladat (6+14=20 pont)

(a) Definiálja, mit jelent, hogy az $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ valós sorozat határértéke $A \in \mathbb{R}$!(b) A definíció alapján igazolja az alábbi határértéket! ($N(\varepsilon) = ?$)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{6n^2 + n + 1}{2n^2 + 20} = 3$$

a, D_i : $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = A$, ha $\forall \varepsilon > 0$ után $\exists N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$, hogy
 ⑥ $\forall n > N(\varepsilon)$ mellett $|a_n - A| < \varepsilon$.

b, $|a_n - A| = \left| \frac{6n^2 + n + 1}{2n^2 + 20} - 3 \right| = \left| \frac{n - 59}{2n^2 + 20} \right| = \frac{n - 59}{2n^2 + 20} \leq$
 ① $\frac{n}{2n^2} = \frac{1}{2n} < \varepsilon \Rightarrow n > \frac{1}{2\varepsilon}$ ②
 Ha $n \geq 59$ ①
 $N(\varepsilon) = \left\lceil \max\left(\frac{1}{2\varepsilon}, 59\right) \right\rceil + 1$ vagy $N(\varepsilon) > \max\left(\frac{1}{2\varepsilon}, 59\right)$ ②

2. feladat (10+10+10=30 pont)

Határozza meg (a tanult tételek, szabályok alapján) a következő határértékeket!

(a) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n \ln(n) + 3 \cdot 2^{2n+1}}{4^{n+3} + 5n^6} = ?$

(b) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n^2 + 5n + 1} - n = ?$

(c) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2n+3}{5+2n} \right)^{n+3} = ?$

a, $\frac{n \ln(n) + 3 \cdot 2^{2n+1}}{4^{n+3} + 5n^6} = \frac{n \ln(n) + 6 \cdot 4^n}{64 \cdot 4^n + 5 \cdot n^6} = \frac{\frac{n \ln(n)}{4^n} + 6}{64 + 5 \frac{n^6}{4^n}} \rightarrow \frac{6}{64} = \frac{3}{32}$
 $n \ln(n) \ll n^2 \ll 4^n$
 $n^6 \ll 4^n$

b, $\sqrt{n^2 + 5n + 1} - n = \frac{n^2 + 5n + 1 - n^2}{\sqrt{n^2 + 5n + 1} + n} = \frac{5 + \frac{1}{n}}{\sqrt{1 + \frac{5}{n} + \frac{1}{n^2}} + 1} \rightarrow \frac{5}{2}$

c, $\left(\frac{2n+3}{5+2n} \right)^{n+3} = \left(\frac{2n+3}{2n+5} \right)^3 \cdot \left(\frac{2n+3}{2n+5} \right)^n = \left(\frac{2 + \frac{3}{n}}{2 + \frac{5}{n}} \right)^3 \cdot \frac{\left(1 + \frac{3/2}{n} \right)^n}{\left(1 + \frac{5/2}{n} \right)^n} \rightarrow \frac{e^{3/2}}{e^{5/2}} = e^{-1}$

3. feladat (7+13=20 pont)

(a) $\frac{2+3i}{i+4} = ?$ Az eredményt algebrai alakban adja meg!

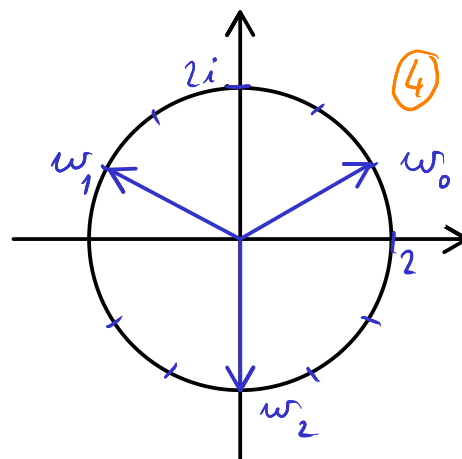
(b) $\sqrt[3]{8i} = ?$ A gyököket trigonometrikus vagy exponenciális alakban adja meg, és ábrázolja is!

$$a, \quad \frac{2+3i}{i+4} = \frac{(2+3i)(4-i)}{(4+i)(4-i)} = \frac{8-2i+12i+3}{4^2+1^2} = \frac{11+10i}{17} = \frac{11}{17} + \frac{10}{17}i \quad (3)$$

$$b, \quad 8i = 8 \cdot e^{i\frac{\pi}{2}} \quad (3)$$

$$(\sqrt[3]{8i})_k = w_k = \sqrt[3]{8} \cdot e^{i(\frac{\pi}{6} + \frac{2\pi}{3} \cdot k)} \quad (k=0,1,2) \quad (3)$$

$$\begin{aligned} w_0 &= 2 \cdot e^{i\frac{\pi}{6}} \\ w_1 &= 2 \cdot e^{i(\frac{\pi}{6} + \frac{2\pi}{3})} = 2e^{i\frac{5\pi}{6}} \\ w_2 &= 2 \cdot e^{i(\frac{\pi}{6} + \frac{4\pi}{3})} = 2e^{i\frac{3\pi}{2}} = -2i \end{aligned} \quad (3)$$



4. feladat (8+22=30 pont)

$$f(x) = \frac{x \cdot \sin(x^2 - 4)}{x^2 - 5x + 6}$$

(a) Határozza meg azt a legbővebb $D_f \subset \mathbb{R}$ halmazt, ahol a függvény értelmezhető! Mely pontokban folytonos a függvény, miért?

(b) Határozza meg a függvény szakadási helyeit és a szakadások típusait! A szakadási pontokban adja meg a függvény bal és jobb oldali határértékét is!

$$a, \quad x^2 - 5x + 6 = (x-2)(x-3); \quad D_f = \mathbb{R} \setminus \{2, 3\} \quad (4)$$

f a D_f halmazon folytonos, mert folyt-lyv-ok halmazán. (2)

b, Szakadási helyek: 2, 3.

2-ben:

$$\lim_{x \rightarrow 2 \pm 0} \frac{x \sin((x+2)(x-2))}{(x-2)(x-3)} = \lim_{x \rightarrow 2 \pm 0} \frac{x(x+2)}{x-3} \cdot \frac{\sin((x+2)(x-2))}{(x+2)(x-2)} = -8 \quad (1)$$

Első tényező, megszüntethető (2)

$\frac{2 \cdot 4}{-1} = -8$ (2)

$\frac{\sin((x+2)(x-2))}{(x+2)(x-2)} \rightarrow 1$ (2)

3-ban:

$$\lim_{x \rightarrow 3 \pm 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3 \pm 0} \frac{x}{x-3} \cdot \frac{\sin(x^2-4)}{x-2} = \pm \infty \quad (1)$$

$\frac{x}{x-3} \rightarrow \pm \infty$ (2)

$\frac{\sin(x^2-4)}{x-2} \rightarrow \frac{\sin(9-4)}{1} = \sin(5) < 0$ (2)

Második tényező (2)

∞ -szorzat szabály helyes használata elengedhetetlen.

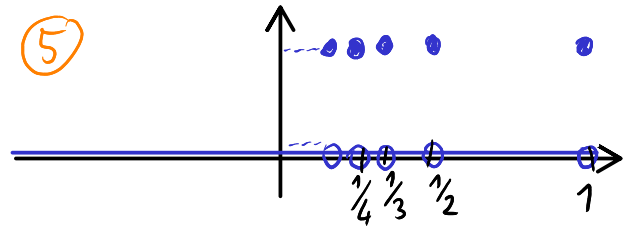
5. feladat (5+5=10 pont, IMSC-seknek javasolt.)

(a) Adjon példát olyan $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ függvényre, amelynek a nulla kivételével minden helyen zérus a határértéke, de a nullában nem létezik a határértéke!

(b) Igazolja, hogy nem létezik olyan $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ függvény, amelynek a nullában 1 a határértéke, minden más pontban pedig nulla!

a,

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{ha } x = \frac{1}{n}, n \in \mathbb{N}_+ \\ 0 & \text{egyébként} \end{cases} \quad (5)$$

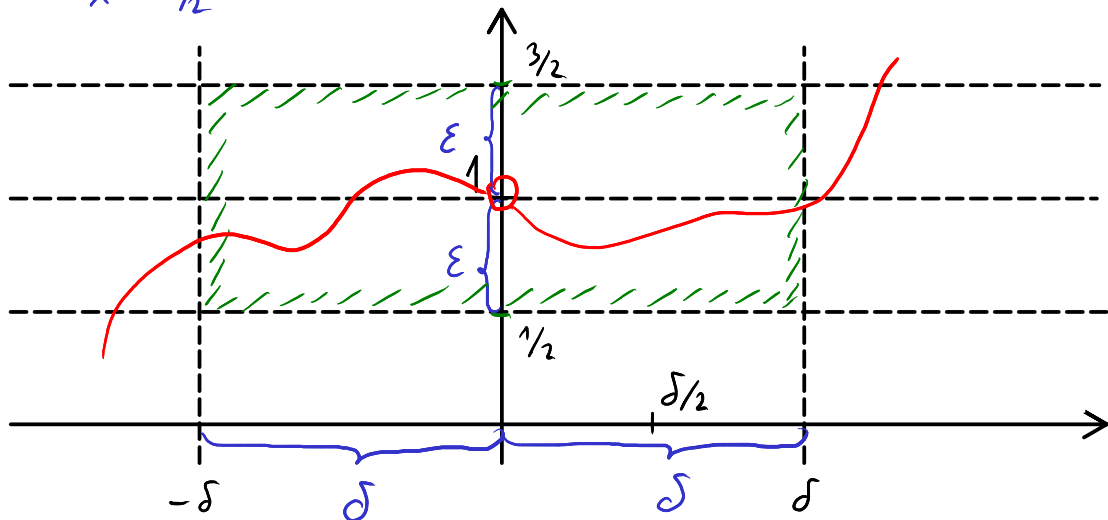


(Általánosan igazolható, hogy $\nexists \lim_{x \rightarrow 0} f(x)$. $x_0 \neq 0$ esetén $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0$)

b, Indirect, t.i.l. $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow 0} 1 \Rightarrow \exists \delta > 0$, hogy

$$\forall x \in (-\delta; 0) \cup (0; +\delta) \text{ esetén } f(x) \in \left(\frac{1}{2}; \frac{3}{2}\right) \quad (\varepsilon = \frac{1}{2})$$

Ekkor $\lim_{x \rightarrow \delta/2} f(x)$ nem eshet $[\frac{1}{2}; \frac{3}{2}]$ -en kívül, $\checkmark$ (5)



1. feladat (6+14=20 pont)

- (a) Definiálja, mit jelent, hogy az $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ valós sorozat határértéke $A \in \mathbb{R}$!
(b) A definíció alapján igazolja az alábbi határértéket! ($N(\varepsilon) = ?$)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{6n^2 + n + 1}{3n^2 + 30} = 2$$

a, D.: $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = A$, ha $\forall \varepsilon > 0$ esetén $\exists N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$, hogy
 $\forall n > N(\varepsilon)$ mellett $|a_n - A| < \varepsilon$.

b, $|a_n - A| = \left| \frac{6n^2 + n + 1}{3n^2 + 30} - 2 \right| = \left| \frac{n - 59}{3n^2 + 30} \right| = \frac{n - 59}{3n^2 + 30} \leq$
 $\leq \frac{n}{3n^2} = \frac{1}{3n} < \varepsilon \Rightarrow n > \frac{1}{3\varepsilon}$
 $N(\varepsilon) = \left\lceil \max\left(\frac{1}{3\varepsilon}, 59\right) \right\rceil + 1$ vagy $N(\varepsilon) > \max\left(\frac{1}{3\varepsilon}, 59\right)$

2. feladat (10+10+10=30 pont)

Határozza meg (a tanult tételek, szabályok alapján) a következő határértékeket!

(a) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n \ln(n) + 5 \cdot 3^{2n-1}}{3^{n+2} + 6n^4} = ?$

(b) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n^2 + 3n + 2} - n = ?$

(c) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{3n+2}{7+3n} \right)^{n+2} = ?$

a, $\frac{n \ln(n) + 5 \cdot 3^{2n-1}}{3^{n+2} + 6n^4} = \frac{n \ln(n) + \frac{5}{3} 9^n}{9 \cdot 3^n + 6n^4} = \frac{\frac{n \ln(n)}{9^n} + \frac{5}{3}}{9 \left(\frac{1}{3}\right)^n + 6 \frac{n^4}{9^n}} \rightarrow +\infty$
 $n \ln(n) \ll n^2 \ll 9^n \rightarrow 0+$
 $n^4 \ll 9^n$

b, $\sqrt{n^2 + 3n + 2} - n = \frac{n^2 + 3n + 2 - n^2}{\sqrt{n^2 + 3n + 2} + n} = \frac{3 + \frac{2}{n}}{\sqrt{1 + \frac{3}{n} + \frac{2}{n^2}} + 1} \rightarrow \frac{3}{2}$

c, $\left(\frac{3n+2}{7+3n} \right)^{n+2} = \left(\frac{3n+2}{3n+7} \right)^2 \cdot \left(\frac{3n+2}{3n+7} \right)^n = \left(\frac{3 + \frac{2}{n}}{3 + \frac{7}{n}} \right)^2 \cdot \frac{\left(1 + \frac{2/3}{n}\right)^n}{\left(1 + \frac{7/3}{n}\right)^n} \rightarrow \frac{e^{2/3}}{e^{7/3}} = e^{-5/3}$

3. feladat (7+13=20 pont)

(a) $\frac{3+2i}{i-4} = ?$ Az eredményt algebrai alakban adja meg!

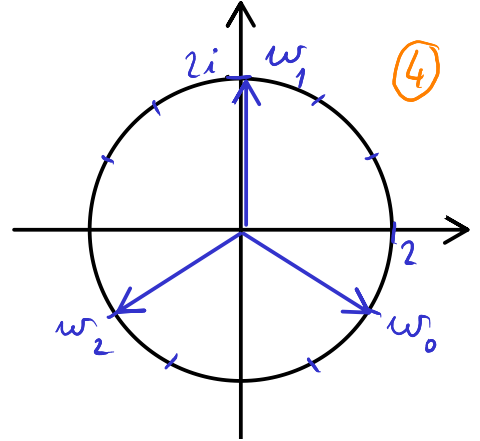
(b) $\sqrt[3]{-8i} = ?$ A gyököket trigonometrikus vagy exponenciális alakban adja meg, és ábrázolja is!

$$a, \frac{3+2i}{i-4} = \frac{(3+2i)(-4-i)}{(-4+i)(-4-i)} = \frac{-12-3i-8i+2}{4^2+1^2} = \frac{-10-11i}{17} = -\frac{10}{17} - \frac{11}{17}i \quad (3)$$

$$b, -8i = 8 \cdot e^{-i\frac{\pi}{2}} \quad (3)$$

$$(\sqrt[3]{-8i})_k = w_k = \sqrt[3]{8} \cdot e^{i(-\frac{\pi}{6} + \frac{2\pi}{3} \cdot k)} \quad (k=0,1,2) \quad (3)$$

$$\left. \begin{aligned} w_0 &= 2 \cdot e^{-i\frac{\pi}{6}} \\ w_1 &= 2 \cdot e^{i(-\frac{\pi}{6} + \frac{2\pi}{3})} = 2e^{i\frac{\pi}{2}} = 2i \\ w_2 &= 2 \cdot e^{i(-\frac{\pi}{6} + \frac{4\pi}{3})} = 2e^{i\frac{7\pi}{6}} \end{aligned} \right\} \quad (3)$$



4. feladat (8+22=30 pont)

$$f(x) = \frac{x \cdot \sin(x^2 - 9)}{x^2 + x - 6}$$

(a) Határozza meg azt a legbővebb $D_f \subset \mathbb{R}$ halmazt, ahol a függvény értelmezhető! Mely pontokban folytonos a függvény, miért?

(b) Határozza meg a függvény szakadási helyeit és a szakadások típusait! A szakadási pontokban adja meg a függvény bal és jobb oldali határértékét is!

$$a, x^2 + x - 6 = (x-2)(x+3); \quad D_f = \mathbb{R} \setminus \{2, -3\} \quad (4)$$

f a D_f halmazon folytonos, mert folyt. fv.-ek hányadosa. (2)

b, Szakadási helyek: 2, -3,

$$\text{-3-ban:} \quad \lim_{x \rightarrow -3 \pm 0} \frac{x \sin((x+3)(x-3))}{(x-2)(x+3)} = \lim_{x \rightarrow -3 \pm 0} \frac{x(x-3)}{x-2} \cdot \frac{\sin((x+3)(x-3))}{(x+3)(x-3)} = -\frac{18}{5} \quad (1)$$

Első tényező, megszüntethető (2)

$$(2) \quad \frac{-3 \cdot (-6)}{-5} = -\frac{18}{5} \quad (2)$$

2-ben:

$$\lim_{x \rightarrow 2 \pm 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2 \pm 0} \frac{x}{x-2} \cdot \frac{\sin(x^2-9)}{x+3} = \pm \infty \quad (1)$$

$$\frac{\sin(4-9)}{5} = -\frac{\sin(5)}{5} > 0 \quad (2)$$

Második tényező (2)

ϵ -kiszámláló szabály helyes kimutatás elhagyható.