MEGOLDÁS

ANALÍZIS 1. — **I. Zárthelyi** — **2024. október 18.**

Mérnökinformatikus szak — α-variáns — Munkaidő: 75 perc

1. feladat (10+10=20 pont)
Határozza meg a következő sorozatok határértékét!

$$(a)\quad a_n = \sqrt[n]{n^2 + 2^n + 5}; \qquad\qquad (b)\quad b_n = \left(\frac{2n-3}{5+2n}\right)^{n+2}$$

a)

$$\underbrace{2 = \sqrt[n]{2^n}}_{3} < a_n = \sqrt[n]{n^2 + 2^n + 5} \underbrace{< \sqrt[n]{2^n + 2^n + 2^n} = \sqrt[n]{3}\cdot 2}_{4}$$

$<$ ha $n \geq 3$; $\quad \sqrt[n]{3}\cdot 2 \xrightarrow{n\to\infty} 2$

Rendőr-elv (2) alapján $\underbrace{a_n \longrightarrow 2.}_{1}$

b)

$$b_n = \left(\frac{2n-3}{5+2n}\right)^2 \cdot \left(\frac{2n-3}{5+2n}\right)^n \;(2)\; = \underbrace{\left(\frac{2 - 3/n}{5/n + 2}\right)^2}_{\to\, 1^2 = 1 \;(2)} \cdot \underbrace{\frac{\left(1 - \frac{3/2}{n}\right)^n}{\left(1 + \frac{5/2}{n}\right)^n}}_{\to\, \frac{e^{-3/2}}{e^{5/2}} \;(2)} \;(2) \longrightarrow e^{-4} \;(2)$$

$3/n \to 0$, $\quad 5/n \to 0$

2. feladat (10+10+10=30 pont)

$$a_1 = 2; \qquad\qquad a_{n+1} = \sqrt{5a_n - 4}$$

(a) Igazolja, hogy a fent megadott rekurzív sorozat elemeire $1 < a_n < 4$ teljesül!
(b) Igazolja, hogy a sorozat monoton növő!
(c) Igazolja, hogy létezik a sorozat határértéke, és adja is meg!

a) Teljes indukcióval: (2) $\quad 1 < a_1 = 2 < 4$ ✓ (2)

T.f.h. $\quad 1 < a_n < 4 \quad /\cdot 5;\ -4$

$5-4 < 5a_n - 4 < 5\cdot 4 - 4 \quad /\sqrt{\ }$

$\sqrt{1} = 1 < \sqrt{5a_n - 4} = a_{n+1} < \sqrt{16} = 4$ ✓ (6)

Tehát $\forall n \in \mathbb{N}^+:\ 1 < a_n < 4.$

b, Teljes indukcióval: 2 $\quad a_1 = 2 < a_2 = \sqrt{5a_1 - 4} = \sqrt{6}$ ✓ 2

T.f.h. $1 < a_n < a_{n+1} \quad / \cdot 5;\ -4;\ \sqrt{\ }$

$$\sqrt{5a_n - 4} = a_{n+1} < \sqrt{5a_{n+1} - 4} = a_{n+2} \ ✓ \quad \Big\} \ 6$$

Tehát $\forall n \in \mathbb{N}^+ : \ a_n < a_{n+1}$.

c, Ha $\exists \lim\limits_{n\to\infty} a_n = A \in \mathbb{R}$, akkor

$$A = \sqrt{5A-4} \ \ 2 \implies A^2 - 5A + 4 = 0 \implies A_{1,2} = \frac{5 \pm \overbrace{\sqrt{25-16}}^{3}}{2} = \begin{cases} 4 \\ 1 \end{cases} \ 4p$$

Mivel (a_n) monoton nő és felülről korlátos, ezért $\exists \lim\limits_{n\to\infty} a_n \in \mathbb{R}$. 2

Mivel $a_n \geq 2 \implies \lim\limits_{n\to\infty} a_n = 4$. 2

3. feladat (7+13=20 pont)

(*a*) $\dfrac{2+3\mathrm{i}}{\mathrm{i}+4}$ =? Az eredményt algebrai alakban adja meg!

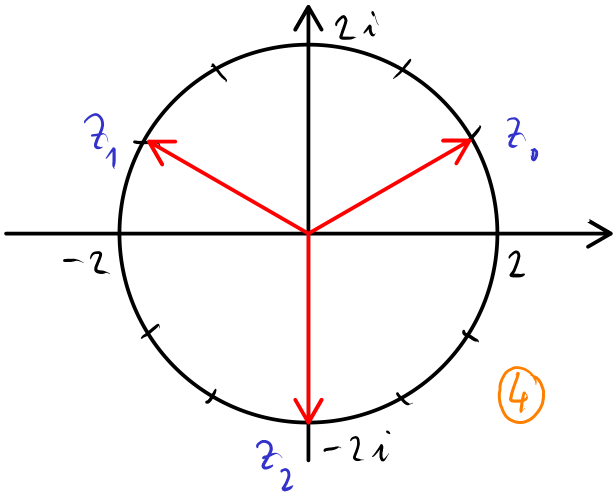
(*b*) $\sqrt[3]{8\mathrm{i}}$ =? A gyököket trigonometrikus vagy exponenciális alakban adja meg, és ábrázolja is!

a, $$\frac{2+3i}{i+4} = \frac{(2+3i)(4-i)}{4^2+1^2} \ 4 = \frac{8-2i+12i+3}{17} = \frac{11}{17} + \frac{10}{17}i \quad 3$$

b, $$8i = 8 \cdot e^{i\frac{\pi}{2}} \quad 2$$

$$z_k = \left(\sqrt[3]{8i}\right)_k = \sqrt[3]{8} \cdot e^{i\left(\frac{\pi}{2\cdot 3} + \frac{2\pi}{3}\cdot k\right)} = \overbrace{2 \cdot e^{i\left(\frac{\pi}{6} + \frac{2k\pi}{3}\right)}}^{3} \quad (k = 0, 1, 2)$$

3
$$z_0 = 2 \cdot e^{i\pi/6} = 2\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right)$$
$$z_1 = 2 \cdot e^{i\,5\pi/6} = 2\left(\cos\frac{5\pi}{6} + i\sin\frac{5\pi}{6}\right)$$
$$z_2 = 2 \cdot e^{i\,3\pi/2} = 2e^{-i\pi/2} = -2i = 2\left(\cos\left(\frac{-\pi}{2}\right) + i\sin\left(\frac{-\pi}{2}\right)\right)$$



4

4. feladat (14+8+8=30 pont)

$$f(x) = \frac{x^2 - x - 6}{x^2 - 4}$$

(*a*) A megfelelő definícióval igazolja, hogy $\lim\limits_{x \to 4} f(x) = \frac{1}{2}$.
(*b*) $\lim\limits_{x \to -2} f(x) =?$ (Számolási szabályokkal.)
(*c*) $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) =?$ (Számolási szabályokkal.)

b)

$D_f = \mathbb{R} \setminus \{\pm 2\}$; 2 $\quad f(x) = \frac{(x-3)\cancel{(x+2)}}{(x-2)\cancel{(x+2)}} = \frac{x-3}{x-2}$ 4

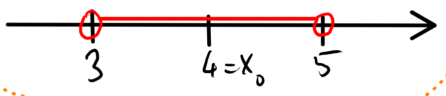
$$\lim_{x \to -2} f(x) = \lim_{x \to -2} \frac{x-3}{x-2} = \frac{-2-3}{-2-2} = \frac{5}{4} \quad 2$$

a)

$$\left| f(x) - \frac{1}{2} \right| = \left| \frac{x-3}{x-2} - \frac{1}{2} \right| = \frac{|2(x-3)-(x-2)|}{2\,|x-2|} = \frac{|x-4|}{2\,|x-2|} < \frac{|x-4|}{2 \cdot 1} < \varepsilon$$

5 6

Ha $|x-4| < 1$, akkor $3 < x < 5$, akkor $1 < x-2 < 3$



$\iff |x-4| < 2\varepsilon$

$\delta(\varepsilon) = \min\{2\varepsilon, 1\}$ 3

c)

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \frac{1 - \frac{1}{x} - \frac{6}{x^2}}{1 - \frac{4}{x^2}} = 1 \quad 2$$

$\frac{1}{x} \to 0$, $\frac{6}{x^2} \to 0$, $\frac{4}{x^2} \to 0$ 6

(vagy $\frac{x-3}{x-2} = \frac{1 - 3/x}{1 - 2/x} \to \frac{1}{1} = 1$)

5. feladat (10 pont, IMSC-seknek javasolt.)
Írja fel azt a $g : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ függvényt, amely a komplex számsíkon az 1 pont körül 60°-kal forgat pozitív (az óramutató járásával ellenkező) irányban!

$$g(z) = \underbrace{e^{i\frac{\pi}{3}}}_{3} \cdot \underbrace{(z-1)}_{3} \underbrace{+1}_{3}$$

+1, ha az egész jó

Megoldás menete, pontozás az α-hoz hasonló.

ANALÍZIS 1. | **I. Zárthelyi** | **2024. október 18.**

Mérnökinformatikus szak | β-variáns | Munkaidő: 75 perc

1. feladat (10+10=20 pont)

Határozza meg a következő sorozatok határértékét!

$$(a) \quad a_n = \sqrt[n]{n^4 + 3^n + 6}; \qquad (b) \quad b_n = \left(\frac{3n-4}{5+3n}\right)^{n-1}$$

$a_n \to 3$; $b_n \to \dfrac{e^{-4/3}}{e^{5/3}} = e^{-3}$

2. feladat (10+10+10=30 pont)

$$a_1 = 3; \qquad a_{n+1} = \sqrt{8a_n - 12}$$

(a) Igazolja, hogy a fent megadott rekurzív sorozat elemeire $2 < a_n < 6$ teljesül!
(b) Igazolja, hogy a sorozat monoton növő!
(c) Igazolja, hogy létezik a sorozat határértéke, és adja is meg!

$A = \sqrt{8A - 12} \Rightarrow A^2 - 8A + 12 = (A-2)(A-6) = 0 \Rightarrow A_1 = 2;\ \underline{A_2 = 6}$

3. feladat (7+13=20 pont)

(a) $\dfrac{5+2\mathrm{i}}{\mathrm{i}+3} = ?$ Az eredményt algebrai alakban adja meg!
(b) $\sqrt[3]{-27\mathrm{i}} = ?$ A gyököket trigonometrikus vagy exponenciális alakban adja meg, és ábrázolja is!

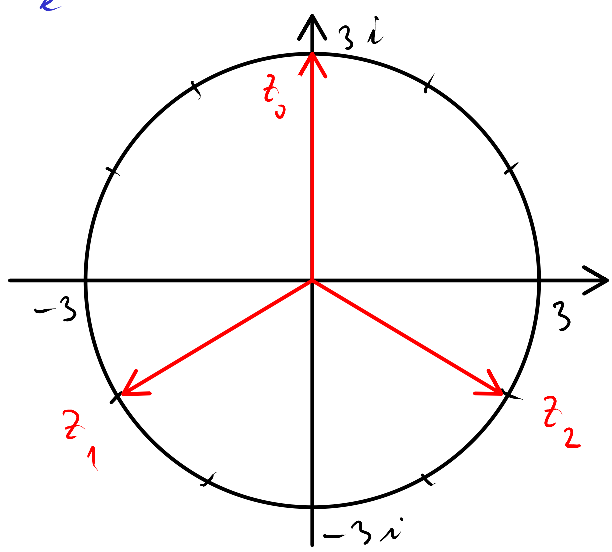
a) $\dfrac{5+2i}{i+3} = \dfrac{(5+2i)(3-i)}{10} = \underline{\dfrac{17}{10} + \dfrac{1}{10}i}$

b) $-27i = 27e^{i\frac{3\pi}{2}}$; $z_k = \left(\sqrt[3]{-27i}\right)_k = 3e^{i\left(\frac{\pi}{2} + \frac{2\pi}{3}k\right)}$; $k = 0, 1, 2$

$z_0 = 3e^{i\frac{\pi}{2}} = 3i$

$z_1 = 3e^{i\frac{7\pi}{6}}$

$z_2 = 3e^{i\frac{11\pi}{6}}$



4. feladat (14+8+8=30 pont)

$$f(x) = \frac{x^2 - x - 6}{x^2 - 9}$$

(a) A megfelelő definícióval igazolja, hogy $\lim_{x\to 2} f(x) = \frac{4}{5}$.
(b) $\lim_{x\to 3} f(x) =?$ (Számolási szabályokkal.)
(c) $\lim_{x\to +\infty} f(x) =?$ (Számolási szabályokkal.)

$D_f = \mathbb{R}\setminus\{\pm 3\}$; $f(x) = \frac{\cancel{(x-3)}(x+2)}{\cancel{(x-3)}(x+3)} = \frac{x+2}{x+3}$

a, $\left| f(x) - \frac{4}{5} \right| = \left| \frac{x+2}{x+3} - \frac{4}{5} \right| = \frac{|x-2|}{5|x+3|} < \frac{|x-2|}{5\cdot 4} < \varepsilon$

ha $|x-2| < 1$, $1 < x < 3$, $4 < x+3 < 6$

$\delta(\varepsilon) = \min\{20\varepsilon, 1\}$

b, $\lim_{x\to 3} f(x) = \frac{3+2}{3+3} = \frac{5}{6}$;

c, $\lim_{x\to +\infty} f(x) = 1$

5. feladat (10 pont, IMSC-seknek javasolt.)
Írja fel azt a $g : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ függvényt, amely a komplex számsíkon az i pont körül 45°-kal forgat negatív (az óramutató járásával egyező) irányban!

$g(z) = e^{-i\frac{\pi}{4}}(z - i) + i$