

1, a,
$$\frac{r_1 (\cos \varphi_1 + i \sin \varphi_1)}{r_2 (\cos \varphi_2 + i \sin \varphi_2)} = \frac{r_1}{r_2} \cdot (\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i \sin(\varphi_1 - \varphi_2)) \quad (8)$$

b,
$$\frac{(1+i)^7}{(1-i)^5} = \frac{(\sqrt{2} \cdot e^{i\frac{\pi}{4}})^7}{(\sqrt{2} \cdot e^{-i\frac{\pi}{4}})^5} = (\sqrt{2})^2 \cdot e^{i\frac{\pi}{4}(7-(-5))} = 2 e^{i3\pi} = -2 \quad (3)$$

2, (12)

$$\sqrt[n]{\left(\frac{2n}{3n+1}\right)^{n+1}} = \underbrace{\frac{2n}{3n+1}}_{a_n} \cdot \underbrace{\sqrt[n]{\frac{2n}{3n+1}}}_{b_n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{2}{3} \cdot 1 = \frac{2}{3} \quad (2)$$

$$\underbrace{a_n = \frac{2}{3 + \frac{1}{n}} \rightarrow \frac{2}{3}}_{(2)} ; \underbrace{\sqrt[n]{\frac{2}{4}} = \sqrt[n]{\frac{2n}{3n+n}}}_{1} < \underbrace{b_n}_{1} < \underbrace{\sqrt[n]{\frac{2n}{3n+0}} = \sqrt[n]{\frac{2}{3}}}_{1} \quad (5)$$

3, a, T.: (d'Hospital's rule) Na $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = 0$, akkor

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x_0)}{g'(x_0)}, \text{ amennyiben a jobb oldal létezik.}$$

b,
$$\lim_{x \rightarrow -2} \frac{\sqrt{2-x} - \sqrt{8-x^2}}{2+x} \stackrel{\frac{0}{0}}{=} \lim_{x \rightarrow -2} \frac{\frac{-1}{2\sqrt{2-x}} - \frac{-2x}{2\sqrt{8-x^2}}}{1} = \frac{-1}{4} - \frac{2}{2} = -\frac{5}{4} \quad (4)$$

4, a, Snijzer's feltétel: Na f -nek lokális szélsőértéke van x_0 -ban,

(4) akkor $f'(x_0) = 0$.

(4) Előjeles feltétel: Na $f'(x_0) = 0$, és f' előjelet vált x_0 -ban,
 akkor f -nek lokális szélsőértéke van x_0 -ban.
 (vagy előjel váltás helyett $\exists f''(x_0) \neq 0$)

b,
$$f'(x) = \frac{x^2+2-x \cdot (2x)}{(x^2+2)^2} = \frac{(\sqrt{2}+x)(\sqrt{2}-x)}{(x^2+2)^2} \quad (3)$$

(12)

(7)

x	$x < -\sqrt{2}$	$-\sqrt{2}$	$-\sqrt{2} < x < \sqrt{2}$	$\sqrt{2}$	$x > \sqrt{2}$
f'	-	0	+	0	-
f	$\searrow$	lok. min.	$\nearrow$	lok. max.	$\searrow$

5* a, $\int u(x) v'(x) dx = u(x) v(x) - \int u'(x) v(x) dx$, anemagiban
 [8] mindkét oldalról a deriválttal és integrálos lehetnek. (3)

(5) Indoklás: Ha u és v deriválható, akkor
 $(uv)' = u'v + uv' \Rightarrow uv' = (uv)' - u'v$, mindkét oldalt
 integrálva, és felhívva, hogy $\int (uv)' = uv$, kapjuk az állítást.

[8] b, $\int \underbrace{(x+2)}_u \underbrace{e^{3x}}_{v'} dx = (x+2) \frac{1}{3} e^{3x} - \int 1 \cdot \frac{1}{3} e^{3x} dx =$ (5)
 $u' = 1 \quad v = \frac{e^{3x}}{3} \quad \underline{\underline{= \frac{x+2}{3} e^{3x} - \frac{1}{9} e^{3x} + C}} \quad (3)$

6* a, $\int \sin(3x) (4 + \cos(3x))^2 dx = \frac{-1}{3} \int (-3 \sin(3x)) (4 + \cos(3x))^2 dx =$
 [8] $f' \cdot f^2$ alak (4)

$= \frac{-1}{3} \frac{(4 + \cos(3x))^3}{3} + C \quad (4)$

[8] b, $\int_{x=1}^4 \frac{1}{\sqrt{x} + x} dx = \int_{t=1}^2 \frac{1}{t + t^2} 2t dt \stackrel{(5)}{=} \int_{t=1}^2 \frac{2}{1+t} dt = \left[2 \ln(t+1) \right]_1^2 =$
 $\underline{\underline{= 2 \ln\left(\frac{3}{2}\right) = 2(\ln 3 - \ln 2)}} \quad (3)$