1. feladat (18 pont)
Oldjuk meg az alábbi differenciálegyenletet. (A megoldást elég implicit alakban megadni.)

$$y' = \frac{x}{y^3 + x^2y^3} \quad (y \neq 0)$$

Mo. Szeparálható differenciálegyenlet, a tanult módszerrel:

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{x}{y^2 + x^2y^3} \quad \Longrightarrow \quad \int y^3 \,\mathrm{d}y = \int \frac{x}{1+x^2}\,\mathrm{d}x \quad (\mathbf{4p}).$$

Az egyenlőség bal oldala:

$$\int y^3 \,\mathrm{d}y = \frac{y^4}{4} + C_1 \quad (C_1 \in \mathbb{R}) \quad (\mathbf{5p}).$$

Az egyenlőség jobb oldala:

$$\int \frac{x}{1+x^2}\,\mathrm{d}x \overset{(\mathbf{2p})}{=} \frac{1}{2}\int \frac{2x}{1+x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\ln(1+x^2) + C_2 \quad (C_2 \in \mathbb{R}) \quad (\mathbf{5p}).$$

Tehát a megoldás (implicit alakban):

$$\frac{y^4(x)}{4} = \frac{1}{2}\ln\left(1+x^2\right) + C \quad (C \in \mathbb{R}) \quad (\mathbf{2p}).$$

---

2. feladat (20 pont)
Oldjuk meg az

$$y' - \frac{2xy}{1+x^2} = (1+x^2)\,\mathrm{ctg}(x) \quad (x \neq 0,\, y \neq 0)$$

differenciálegyenletet.

Mo. Inhomogén lineáris egyenlet, a hozzá tartozó homogén egyenlet:

$$y'(x) - \frac{2xy(x)}{1+x^2} = 0 \quad \Longrightarrow \quad y_{h,á}(x) = C(1+x^2) \quad (C \in \mathbb{R},\, x \in \mathbb{R}\setminus\{0\}) \quad (\mathbf{8p}).$$

(Megoldva szeparálhatóként, vagy a megoldás általános alakjának ismeretéből.)
Az inhomogén egyenlet megoldása: keressük a megoldást $y(x) = c(x)(1+x^2)$ alakban (ahol c egy $\mathbb{R} \rightarrowtail \mathbb{R}$ differenciálható függvény) **(1p)** .
Behelyettesítve a differenciálegyenletbe:

$$\underbrace{c'(x)(1+x^2) + 2xc(x)}_{y'(x)} - \underbrace{2xc(x)}_{\frac{2xy(x)}{1+x^2}} = (1+x^2)\,\mathrm{ctg}(x) \quad (\mathbf{2p}).$$

Ebből pedig $c'(x) = \mathrm{ctg}(x)$.

$$\int \mathrm{ctg}(x)\,\mathrm{d}x \overset{(\mathbf{1p})}{=} \int \frac{\cos(x)}{\sin(x)}\,\mathrm{d}x = \ln|\sin(x)| + D \quad (D \in \mathbb{R}) \quad (\mathbf{3p}),$$

tehát a $D = 0$ választással $c(x) := \ln|\sin(x)|$, így az inhomogén egyenlet egy partikuláris megoldása:

$$y_{i,p}(x) = (1+x^2)c(x) = (1+x^2)\ln|\sin(x)| \quad (\mathbf{2p}).$$

Amiből az általános megoldás:

$$y_{i,á}(x) \overset{(\mathbf{2p})}{=} y_{i,p}(x) + y_{h,á}(x) \overset{(\mathbf{1p})}{=} (1+x^2)\ln|\sin(x)| + C(1+x^2) \quad (C \in \mathbb{R},\, x \in \mathbb{R}\setminus\{0\}).$$

3. feladat (22 pont)
Adjuk meg az alábbi differenciálegyenlet általános megoldását.

$$y'' + 2y' + y = x + e^{-x}$$

Mo. Másodrendű, lineáris, állandó együtthatós, inhomogén egyenlet. A homogén egyenlethez tartozó karakterisztikus egyenlet:

$$\lambda^2 + 2\lambda + 1 = 0 \quad (\mathbf{2p}),$$

gyökei: $\lambda_{1,2} = -1$ **(2p)**. Ebből a homogén egyenlet általános megoldása:

$$y_{h,á}(x) = C_1 e^{-x} + C_2 x e^{-x} \quad (x \in \mathbb{R},\, C_1, C_2 \in \mathbb{R}) \quad (\mathbf{4p}).$$

Az inhomogén egyenlet egy partikuláris megoldását keressük $y(x) = Ax + B + Cx^2 e^{-x}$ ($x \in \mathbb{R}$, $A, B, C \in \mathbb{R}$) alakban (rezonancia) **(4p)**. Deriválva kétszer **(2p)**:

$$\begin{aligned} y(x) &= Ax + B + Cx^2 e^{-x} && | \cdot 1 \\ y'(x) &= A + (-Cx^2 + 2Cx)e^{-x} && | \cdot 2 \\ y''(x) &= (Cx^2 - 4Cx + 2C)e^{-x} && | \cdot 1 \end{aligned}$$

Behelyettesítve a differenciálegyenletbe **(1p)**:

$$Ax + 2A + B + 2Ce^x = x + e^x \quad \Longrightarrow \quad A = 1, B = -2, C = \frac{1}{2} \quad (\mathbf{3p}),$$

tehát az inhomogén egyenlet egy partikuláris megoldása:

$$y_{i,p}(x) = x - 2 + \frac{x^2}{2} e^x \quad (x \in \mathbb{R}) \quad (\mathbf{2p}).$$

A differenciálegyenlet általános megoldása:

$$\begin{aligned} y_{i,á}(x) &= y_{i,p}(x) + y_{h,á}(x) = \\ &= x - 2 + \frac{x^2}{2} e^x + C_1 e^x + C_2 x e^x \quad (x \in \mathbb{R},\, C_1, C_2 \in \mathbb{R}) \quad (\mathbf{2p}). \end{aligned}$$

4. feladat (7+7+8=22 pont)
Konvergensek-e az alábbi sorok?

$$a) \sum_{n \in \mathbb{N}^+} \sqrt[n]{1 + \frac{1}{n}} \qquad b) \sum_{n \in \mathbb{N}} \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{n}\right)^n \qquad c) \sum_{n \in \mathbb{N}} (-1)^n \frac{2}{\ln(n^2 + 3)}$$

Mo. *a)* Legyen $a_n := \sqrt[n]{1 + \frac{1}{n}}$. Minden $n \in \mathbb{N}^+$ esetén $a_n \geq 1$ **(4p)**, következésképpen az $(a_n)_{n \in \mathbb{N}^+}$ sorozat nem tart 0-hoz **(2p)**, ezért a $\sum_{n \in \mathbb{N}^+} a_n$ sor divergens **(1p)**.

b) Legyen $b_n := \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{n}\right)^n \quad (n \in \mathbb{N}^+)$.

$$\sqrt[n]{b_n} \overset{(\mathbf{1p})}{=} \frac{1}{3} + \frac{1}{n} \xrightarrow[(\mathbf{2p})]{n \to \infty} \frac{1}{3} < 1 \quad (\mathbf{2p}),$$

tehát a gyökkritérium alapján $\sum_{n \in \mathbb{N}} b_n$ konvergens **(2p)**.

c) Legyen $c_n := (-1)^n \frac{2}{\ln(n^2+3)} \quad (n \in \mathbb{N}^+)$.

Ekkor $\sum_{n \in \mathbb{N}} c_n$ alternál **(1p)** $\lim_{n \to \infty} |c_n| = 0$ **(1p)**, és $(|c_n|)_{n \in \mathbb{N}}$ montonon csökkenő, hiszen egy pozitív tagú, monoton növő sorozat reciproka **(4p)**, tehát a Leibniz-kritérium szerint a $\sum_{n \in \mathbb{N}} c_n$ sor konvergens **(2p)**.

5. feladat (6+12=18 pont)
a) Mit mond ki az integrálkritérium?
b) Konvergens-e a

$$\sum_{n\in\mathbb{N},\, n\geq 2} \frac{1}{3n + n\ln(n)}$$

numerikus sor?

Mo. *a*) Legyen $f : [1, +\infty[\to \mathbb{R}_+$ monoton csökkenő függvény **(2p)** . Ekkor

$$\sum_{n=1}^{\infty} f(n) < +\infty \quad \Leftrightarrow \quad \int_1^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x < +\infty. \qquad (\mathbf{4p})$$

b) Legyen

$$f(x) := \frac{1}{x(3+\ln(x))} \quad (x \geq 2) \quad (\mathbf{2p}).$$

Ekkor f nemnegatív, monoton csökkenő **(2p)** .

$$\int_2^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x \overset{(\mathbf{2p})}{=} \lim_{b\to\infty} \int_2^{b} \frac{\frac{1}{x}}{3+\ln(x)}\,\mathrm{d}x \overset{(\mathbf{3p})}{=} \lim_{b\to\infty} [\ln(3+\ln(x))]_{x=2}^{b} \overset{(\mathbf{1p})}{=}$$

$$= \lim_{b\to\infty} (\ln(3+\ln(b)) - \ln(3+\ln(2))) \overset{(\mathbf{1p})}{=} +\infty$$

tehát az integrálkritérium alapján $\sum_{n\in\mathbb{N},\, n\geq 2} f(n)$ divergens **(1p)** .

---

6. feladat (plusz 10 pontért)
Legyen $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ monoton csökkenő függvény. Bizonyítsuk be, hogy ha $\lim_{x\to+\infty} \sqrt[x]{f(x)} \in]0,1[$, akkor $\int_0^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x < +\infty$

Mo. A feladat feltétele, az átviteli elv **(1p)** és a gyökkritérium **(1p)** alapján a $\sum_{n\in\mathbb{N}} f(n)$ numerikus sor konvergens **(3p)** , Az f függvény monoton csökkenő és nemnegatív értékű **(1p)** , tehát az integrálkritérium **(2p)** szerint $\int_0^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x < +\infty$ **(2p)** .
