

*** 1. feladat (12+14=26 pont)**

Számítsuk ki az $\int_H f$ integrál értékét, ahol

a)

$$f(x, y) := 6xe^{y^3} \quad ((x, y) \in \mathbb{R}^2),$$

H pedig az $(1, 1)$ $(0, 1)$ és $(0, 0)$ csúcspontok által meghatározott háromszög;

b)

$$f(x, y, z) := \sqrt{x^2 + y^2} \quad ((x, y, z) \in \mathbb{R}^3),$$

$$H := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 1 \leq x^2 + y^2 + z^2 \leq 4, 0 \leq z, y \leq 0\}.$$

Mo. a)

$$H = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq y \leq 1, 0 \leq x \leq y\}, \quad (2\text{p}).$$

H normáltartomány, f folytonos H -n **(1p)**, tehát:

$$\int_H f \stackrel{(2\text{p})}{=} \int_0^1 \int_0^y 6xe^{y^3} dx dy \stackrel{(2\text{p})}{=} \int_0^1 \left[3x^2 e^{y^3} \right]_{x=0}^y dx \stackrel{(2\text{p})}{=} \int_0^1 3y^2 e^{y^3} dx \stackrel{(2\text{p})}{=} \left[e^{y^3} \right]_{y=0}^1 \stackrel{(1\text{p})}{=} e - 1.$$

b) Gömbi koordinátákkal

$$\begin{aligned} \int_H f &\stackrel{(4\text{p})}{=} \int_1^2 \int_\pi^{2\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(r \cos(\varphi) \sin(\theta), r \sin(\varphi) \sin(\theta), r \cos(\theta)) \cdot r^2 \sin(\theta) d\theta d\varphi dr \stackrel{(2\text{p})}{=} \\ &= \int_1^2 \int_\pi^{2\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} r^3 \sin^2(\theta) d\theta d\varphi dr \stackrel{(2\text{p})}{=} \pi \int_1^2 r^3 dr \int_0^{\frac{\pi}{2}} \underbrace{\sin^2(\theta)}_{\stackrel{(2\text{p})}{=} \frac{1}{2}(1 - \cos(2\theta))} d\theta \stackrel{(2\text{p})}{=} \\ &= \pi \left[\frac{r^4}{4} \right]_{r=1}^2 \left[\frac{\theta}{2} - \frac{\sin(2\theta)}{4} \right]_{\theta=0}^{\frac{\pi}{2}} \stackrel{(2\text{p})}{=} \pi \left(4 - \frac{1}{4} \right) \frac{\pi}{4} = \frac{15\pi^2}{16} \end{aligned}$$

*** 2. feladat (10 pont)**

Legyen $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ abszolút integrálható függvény. Fejezzük ki az

$$\mathcal{F}(x \mapsto 2x \cdot f(3x))$$

Fourier-transzformáltat az f függvény Fourier-transzformáltjának segítségével.

Mo. 1. megoldás. Minden $\omega \in \mathbb{R}$ esetén

$$\mathcal{F}(x \mapsto f(3x))(\omega) = \frac{1}{3} \mathcal{F}(f)\left(\frac{\omega}{3}\right) \quad (3\text{p})$$

$$\mathcal{F}(x \mapsto xf(3x))(\omega) = \frac{1}{9} i \mathcal{F}(f)' \left(\frac{\omega}{3} \right) \quad (5\text{p})$$

$$\mathcal{F}(x \mapsto 2xf(3x))(\omega) = \frac{2i}{9} \mathcal{F}(f)' \left(\frac{\omega}{3} \right) \quad (2\text{p})$$

2. megoldás. Minden $\omega \in \mathbb{R}$ esetén

$$\mathcal{F}(x \mapsto 2xf(3x))(\omega) \stackrel{(2\text{p})}{=} 2 \mathcal{F}(x \mapsto xf(3x))(\omega) \stackrel{(3\text{p})}{=} 2i \mathcal{F}(x \mapsto f(3x))'(\omega) \stackrel{(5\text{p})}{=} \frac{2i}{9} \mathcal{F}(f)' \left(\frac{\omega}{3} \right)$$

3. megoldás. Minden $\omega \in \mathbb{R}$ esetén

$$\mathcal{F}(x \mapsto 2xf(3x))(\omega) \stackrel{(2\text{p})}{=} 2 \mathcal{F}(x \mapsto xf(3x))(\omega) \stackrel{(5\text{p})}{=} \frac{2}{9} \mathcal{F}(x \mapsto xf(x)) \left(\frac{\omega}{3} \right) \stackrel{(3\text{p})}{=} \frac{2i}{9} \mathcal{F}(f)' \left(\frac{\omega}{3} \right)$$

3. feladat (6+8=14 pont)

Írjuk fel az elsőrendű, függvény együtthatós, homogén, lineáris differenciálegyenletek általános alakját. Írjuk fel és bizonyítsuk be a megoldás általános alakjáról tanult tételt.

Mo. Tétel. Legyen $I \subseteq \mathbb{R}$ nyílt intervallum **(1p)**, $g : I \rightarrow \mathbb{R}$ folytonos függvény **(1p)**, és jelölje G egy tetszőleges primitív függvényét g -nek **(1p)**. Ekkor az $y : I \rightarrow \mathbb{R}$ differenciálható függvényre pontosan akkor teljesül az

$$y'(x) + g(x)y(x) = 0 \quad (x \in I) \quad \textbf{(1p)} \quad (1)$$

egyenlőség, ha létezik $C \in \mathbb{R}$, amelyre

$$y(x) = Ce^{-G(x)} \quad (x \in I). \quad \textbf{(2p)} \quad (2)$$

Bizonyítás. Először belátjuk, hogy minden fenti alakú függvény teljesíti az (1) differenciálegyenletet. Ehhez legyen $C \in \mathbb{R}$ tetszőleges, és minden $x \in I$ esetén $y(x) := Ce^{-G(x)}$. Ekkor minden $x \in I$ -re

$$y'(x) + g(x)y(x) = -Ce^{-G(x)}g(x) + g(x)Ce^{-G(x)} = 0. \quad \textbf{(3p)}$$

Legyen most $y : I \rightarrow \mathbb{R}$ olyan függvény, amelyre minden $x \in I$ esetén

$$y'(x) + g(x)y(x) = 0$$

teljesül, megmutatjuk, hogy ekkor y (2) alakban írható. Szorozzuk ezt az egyenletet $e^{G(x)}$ -szel, ekkor

$$e^{G(x)}y'(x) + e^{G(x)}g(x)y(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad (y \cdot e^G)'(x) = 0 \quad (x \in I) \quad \textbf{(3p)}$$

azaz létezik olyan $C \in \mathbb{R}$, hogy minden $x \in I$ esetén

$$y(x)e^{G(x)} = C \quad \Leftrightarrow \quad y(x) = Ce^{-G(x)} \quad \textbf{(2p)}.$$

4. feladat (plusz 10 pontért)

Igazoljuk, hogy a $B_1 = \{\underline{x} \in \mathbb{R}^n \mid \|\underline{x}\| < 1\} \subset \mathbb{R}^n$ egységgömb nyílt halmaz.

Mo. Azt kell igazolnunk, hogy bármely $\underline{x} \in B_1$ esetén van $\underline{x}$ -nek olyan $B_\varepsilon(\underline{x}) = \{\underline{z} \in \mathbb{R}^n \mid \|\underline{z} - \underline{x}\| < \varepsilon\}$ környezete ($\varepsilon > 0$), mely B_1 -be esik, azaz $B_\varepsilon(\underline{x}) \subset B_1$ **(3p)**. Tetszőleges $\underline{x} \in B_1$ esetén legyen $\varepsilon = 1 - \|\underline{x}\| > 0$ **(3p)**. Ekkor ha $\underline{y} \in B_\varepsilon(\underline{x})$, akkor a háromszögegyenlőtlenség alapján $\|\underline{y}\| \leq \|\underline{x}\| + \|\underline{y} - \underline{x}\| < 1 - \varepsilon + \varepsilon = 1$, tehát $\underline{y} \in B_1$. Mivel ez minden $\underline{y} \in B_\varepsilon(\underline{x})$ pontra igaz, ezért $B_\varepsilon(\underline{x}) \subset B_1$, amit igazolni akartunk. Tehát B_1 valóban nyílt halmaz **(4p)**.
