*** 1. feladat (15 pont)**
Integráljuk az $f(x,y,z) := \dfrac{x}{x^2+y^2}$ $\quad ((x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\},\ z \in \mathbb{R})$ függvényt a

$$H := \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid 1 \le x^2+y^2+z^2 \le 4,\ x \ge 0,\ y \ge 0, z \le 0\}$$

halmazon.

*** 2. feladat (6+6+5=17 pont)**
Legyen f az a 2π szerint periodikus függvény, amelyre

$$f(x) := \begin{cases} x+\pi & \text{, ha } x \in [-\pi, 0[\\ x & \text{, ha } x \in [0, \pi[\,. \end{cases}$$

a) Mondjuk ki a Fourier-sorok pontonkénti konvergenciájáról szóló Dirichlet-tételt.
b) Jelölje Φ az f függvény Fourier-sorának összegfüggvényét. Adjuk meg a $\Phi(0)$ és $\Phi(-\frac{\pi}{2})$ értékeket, és rajzoljuk fel Φ grafikonját.
c) Számítsuk ki az $a_3(f)$ Fourier-együtthatót.

3. feladat (6+12=18 pont)
Mondjuk ki és bizonyítsuk be az iránymenti deriváltak kiszámításáról szóló tételt.

4. feladat (plusz 10 pontért)
Bizonyítsuk be, hogy ha $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ folytonos függvény és $a < b$ valós számok, akkor

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \cdot \int_a^b \frac{1}{f(x)}\,\mathrm{d}x \ge (b-a)^2.$$

(*Segítség: Szorozzuk a fenti egyenlőtlenséget* 2*-vel, a bal oldalt alakítsuk át kettős integrállá kétféleléppen, majd összevonás után becsüljünk alulról.*)

2024.06.04.
Analízis 2. informatikusoknak vizsga, feleletválasztós rész (50 pont)

címke névvel, Neptun kóddal

$\boldsymbol{\alpha}$ ■, $\boldsymbol{\beta}$ □

Válassza ki az egyetlen helyes megoldást![1] **($4 \times 5 = 20$ pont)**

1. $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{\sin(xy)}{|xy|} =?$

□ 0; □ 1; □ -1; □ nem létezik; □ más válasz.

2. Az $y''(x) - 2y'(x) + y(x) = e^{-x}$ differenciálegyenlet megoldásakor a próbafüggvényt $y(x) = \dots \quad (x \in \mathbb{R}, A \in \mathbb{R})$ alakban keressük.

□ Ae^x; □ Ae^{-x}; □ Axe^x; □ Ax^2e^x; □ Ax^2e^{-x}; □ más válasz.

3. Tudjuk, hogy a $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} a_n(x+2)^n$ hatványsor $x = 1$ esetén konvergens. Ekkor $x = -3$ esetén a hatványsor

□ az $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ együttható-sorozat választásától függetlenül konvergens;
□ az $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ együttható-sorozat választásától függően lehet konvergens és divergens;
□ az $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ együttható-sorozat választásától függetlenül divergens.

4. $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{2^{n+1} + 3^n}{2^{2n+1}} =?$

□ 0; □ 1; □ 4; □ $+\infty$; □ más válasz.

Minden állításról döntse el, hogy igaz (I) vagy hamis (H)![2] **($10 \times 3 = 30$ pont)**

5. Legyenek $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ és $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ olyan számsorozatok amelyekre teljesül, hogy a $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} b_n$ sor konvergens, és létezik olyan $N \in \mathbb{N}$, hogy minden $n \in \mathbb{N}$ és $n \geq N$ esetén $|a_n| \leq b_n$. Ekkor:

a) $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} a_n$ konvergens □ I; □ H;
b) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$ □ I; □ H;
c) $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} b_n$ abszolút konvergens. □ I; □ H;

6. Legyen $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}_+$ (azaz $\mathbb{R}^2$ minden pontjában értelmezve van, és nemnegatív értékű) folytonos függvény, amelyre $f(0,0) = 0$ teljesül.

a) Az f függvénynek lokális szélsőértéke van az origóban. □ I; □ H;
b) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0$. □ I; □ H;
c) f-nek létezik maximuma az $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$ halmazon. □ I; □ H;
d) $\int\limits_0^1 \int\limits_0^x f(x,y)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x = \int\limits_0^x \int\limits_0^1 f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$. □ I; □ H;

7. Az $y'(x) = \operatorname{sh}(x)(y(x) - 1)$ differenciálegyenlet

elsőrendű □ I; □ H;
homogén lineáris □ I; □ H;
szeparálható □ I; □ H;

[1] A helyes megoldás előtti négyzetet **satírozza be**! Helyes válasz: 5 pont; helytelen vagy nem egyértelmű válasz: 0 pont.
[2] A helyes válasz előtti négyzetet **satírozza be**! Helyes válasz: 3 pont; nem egyértelmű válasz: 0 pont; helytelen válasz: -3 pont, azonban egy-egy feladat teljes pontszáma nem csökken nulla alá.

*** 1. feladat (15 pont)**
Integráljuk az $f(x,y,z) := \dfrac{x}{x^2+y^2}$ $\quad ((x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\},\, z \in \mathbb{R})$ függvényt a

$$H := \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid 1 \le x^2+y^2+z^2 \le 4,\, x \ge 0,\, y \ge 0, z \le 0\}$$

halmazon.

Mo. Gömbi koordinátákkal **(2p)** $(H = \underline{S}\langle[1,2] \times [\frac{\pi}{2}, \pi] \times [0, \frac{\pi}{2}]\rangle)$:

$$\int_H f \overset{(\mathbf{3p})}{=} \int_1^2 \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} f\left(r\cos(\varphi)\sin(\theta), r\sin(\varphi)\sin(\theta), r\cos(\theta)\right) \cdot r^2 \sin(\theta)\,\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}r \overset{(\mathbf{2p})}{=}$$

$$= \int_1^2 \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{r\cos(\varphi)\sin(\theta)}{r^2\sin^2(\theta)} \cdot r^2 \sin(\theta)\,\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}r \overset{(\mathbf{1p})}{=} \int_1^2 \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} r\cos(\varphi)\,\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}r \overset{(\mathbf{3p})}{=}$$

$$= \frac{\pi}{2} \int_1^2 r\,\mathrm{d}r \cdot \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(\varphi)\,\mathrm{d}\varphi \overset{(\mathbf{2p})}{=} \frac{\pi}{2}\left[\frac{r^2}{2}\right]_{r=1}^2 \cdot [\sin(\varphi)]_{r=0}^{\frac{\pi}{2}} \overset{(\mathbf{2p})}{=} \frac{3\pi}{4}.$$

*** 2. feladat (6+6+5=17 pont)**
Legyen f az a 2π szerint periodikus függvény, amelyre

$$f(x) := \begin{cases} x+\pi & , \text{ha } x \in [-\pi, 0[\\ x & , \text{ha } x \in [0, \pi[\,. \end{cases}$$

a) Mondjuk ki a Fourier-sorok pontonkénti konvergenciájáról szóló Dirichlet-tételt.
b) Jelölje Φ az f függvény Fourier-sorának összegfüggvényét. Adjuk meg a $\Phi(0)$ és $\Phi(-\frac{\pi}{2})$ értékeket, és rajzoljuk fel Φ grafikonját.
c) Számítsuk ki az $a_3(f)$ Fourier-együtthatót.

Mo. a) Legyen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 2π szerint periodikus függvény, és tegyük fel, hogy $[-\pi, \pi]$ felbontható úgy véges sok részintervallumra, hogy ezek belsején f monoton és korlátos **(2p)** . Ekkor f Fourier-sora minden $x \in \mathbb{R}$ pontban konvergens **(2p)** , és

$$\left(\Phi(f)\right)(x) = \frac{f(x-0)+f(x+0)}{2} \quad (\mathbf{2p}).$$

b) Az f függvényre teljesülnek a Dirichlet-tétel feltételei **(1p)** , ezért

$$\Phi(0) \overset{(\mathbf{1p})}{=} \frac{0+\pi}{2} = \frac{\pi}{2}, \qquad \Phi\left(-\frac{\pi}{2}\right) \overset{(\mathbf{1p})}{=} f\left(-\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{2}$$

\+ rajz **(3p)** .

c)

$$a_3(f) \overset{(\mathbf{2p})}{=} a_3\left(f - \frac{\pi}{2}\right) \overset{(\mathbf{1p})}{=} \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left(f(x) - \frac{\pi}{2}\right)\cos(3x)\,\mathrm{d}x \overset{(\mathbf{1p})}{=} 0$$

ahol az utolsó egyenlőség azért teljesül, mert az integrandus véges sok pont kivételével páratlan **(1p)** .

---

3. feladat (6+12=18 pont)
Mondjuk ki és bizonyítsuk be az iránymenti deriváltak kiszámításáról szóló tételt.

Mo. *Tétel:* Ha az $f : \mathbb{R}^n \rightarrowtail \mathbb{R}$ függvény (totálisan) differenciálható az $\underline{a} \in \operatorname{int}(\operatorname{Dom}(f))$ pontban **(2p)**, akkor minden $\underline{e} \in \mathbb{R}^n$ és $\|\underline{e}\| = 1$ esetén f az $\underline{e}$ irány mentén deriválható az $\underline{a}$ pontban **(2p)**, és

$$D_{\underline{e}} f(\underline{a}) = \langle \operatorname{grad} f(\underline{a}), \underline{e} \rangle \quad \mathbf{(2p)}$$

Bizonyítás. Legyen $f : \mathbb{R}^n \rightarrowtail \mathbb{R}$ olyan függvény, amely (totálisan) differenciálható az $\underline{a} \in \operatorname{int}(\operatorname{Dom}(f))$ pontban, valamint legyen $\underline{e} \in \mathbb{R}^n$, amelyre $\|\underline{e}\| = 1$ teljesül, illetve $\varepsilon > 0$ tetszőleges **(1p)**. Ekkor az f függvény $\underline{a}$ pontbeli totális differenciálhatóságából adódóan létezik olyan $\delta > 0$, hogy $\|\underline{x} - \underline{a}\| < \delta$ és $\underline{x} \neq \underline{a}$ esetén

$$\left| \frac{f(\underline{x}) - f(\underline{a}) - \langle \operatorname{grad} f(\underline{a}), \underline{x} - \underline{a} \rangle}{\|\underline{x} - \underline{a}\|} \right| < \varepsilon. \quad \mathbf{(4p)}$$

Legyen $0 < t < \delta$. Az előbbi egyenlőtlenség $\underline{x} := \underline{a} + t.\underline{e}$ esetén is teljesül, hiszen $\|\underline{a} + t.\underline{e} - \underline{a}\| = |t| < \delta$, tehát

$$\left| \frac{f(\underline{a} + t.\underline{e}) - f(\underline{a}) - \langle \operatorname{grad} f(\underline{a}), t.\underline{e} \rangle}{t} \right| = \left| \frac{f(\underline{a} + t.\underline{e}) - f(\underline{a})}{t} - \langle \operatorname{grad} f(\underline{a}), \underline{e} \rangle \right| < \varepsilon. \quad \mathbf{(4p)}$$

Ez pedig a pontbeli határérték és az iránymenti derivált definíciója alapján azt jelenti, hogy

$$D_{\underline{e}} f(\underline{a}) = \lim_{t \to 0+} \frac{f(\underline{a} + t.\underline{e}) - f(\underline{a})}{t} = \langle \operatorname{grad} f(\underline{a}), \underline{e} \rangle. \quad \mathbf{(3p)}$$

(Alternatív bizonyítás: átviteli elv segítségével...)

---

4. feladat (plusz 10 pontért)
Bizonyítsuk be, hogy ha $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ folytonos függvény és $a < b$ valós számok, akkor

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \cdot \int_a^b \frac{1}{f(x)}\,\mathrm{d}x \geq (b-a)^2.$$

(*Segítség: Szorozzuk a fenti egyenlőtlenséget* 2*-vel, a bal oldalt alakítsuk át kettős integrállá kétféleléppen, majd összevonás után becsüljünk alulról.*)

Mo. Legyenek $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$ és $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ folytonos függvény. Ekkor a Fubini-tétel és a Riemann-integrál monotinitása alapján

$$2\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \cdot \int_a^b \frac{1}{f(x)} \overset{\mathbf{(3p)}}{=} \int_a^b \int_a^b \frac{f(x)}{f(y)}\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x + \int_a^b \int_a^b \frac{f(y)}{f(x)}\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x \overset{\mathbf{(3p)}}{=} \int_{[a,b]\times[a,b]} \frac{f(x)}{f(y)} + \frac{f(y)}{f(x)}\,\mathrm{d}(x,y) \overset{\mathbf{(2p)}}{\geq}$$

$$\geq \int_{[a,b]\times[a,b]} 2\,\mathrm{d}(x,y) \overset{\mathbf{(2p)}}{=} 2(b-a)^2,$$

amiből már adódik a feladat állítása.

2024.06.04.
Analízis 2. informatikusoknak vizsga, feleletválasztós rész (50 pont)

címke névvel, Neptun kóddal

$\boldsymbol{\alpha}$ ■, $\boldsymbol{\beta}$ ☐

Válassza ki az egyetlen helyes megoldást![1] ($4 \times 5 = 20$ pont)

1. $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{\sin(xy)}{|xy|} = ?$

☐ 0; ☐ 1; ☐ -1; ■ nem létezik; ☐ más válasz.

2. Az $y''(x) - 2y'(x) + y(x) = e^{-x}$ differenciálegyenlet megoldásakor a próbafüggvényt $y(x) = \ldots \quad (x \in \mathbb{R}, A \in \mathbb{R})$ alakban keressük.

☐ Ae^x; ■ Ae^{-x}; ☐ Axe^x; ☐ Ax^2e^x; ☐ Ax^2e^{-x}; ☐ más válasz.

3. Tudjuk, hogy a $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} a_n(x+2)^n$ hatványsor $x = 1$ esetén konvergens. Ekkor $x = -3$ esetén a hatványsor

■ az $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ együttható-sorozat választásától függetlenül konvergens;
☐ az $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ együttható-sorozat választásától függően lehet konvergens és divergens;
☐ az $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ együttható-sorozat választásától függetlenül divergens.

4. $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{2^{n+1} + 3^n}{2^{2n+1}} = ?$

☐ 0; ☐ 1; ■ 4; ☐ $+\infty$; ☐ más válasz.

Minden állításról döntse el, hogy igaz (I) vagy hamis (H)![2] ($10 \times 3 = 30$ pont)

5. Legyenek $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ és $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ olyan számsorozatok amelyekre teljesül, hogy a $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} b_n$ sor konvergens, és létezik olyan $N \in \mathbb{N}$, hogy minden $n \in \mathbb{N}$ és $n \geq N$ esetén $|a_n| \leq b_n$. Ekkor:

a) $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} a_n$ konvergens ■ I; ☐ H;
b) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$ ■ I; ☐ H;
c) $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} b_n$ abszolút konvergens. ■ I; ☐ H;

6. Legyen $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}_+$ (azaz $\mathbb{R}^2$ minden pontjában értelmezve van, és nemnegatív értékű) folytonos függvény, amelyre $f(0,0) = 0$ teljesül.

a) Az f függvénynek lokális szélsőértéke van az origóban. ■ I; ☐ H;
b) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0.$ ■ I; ☐ H;
c) f-nek létezik maximuma az $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, x^2 + y^2 \leq 1\}$ halmazon. ■ I; ☐ H;
d) $\int\limits_0^1 \int\limits_0^x f(x,y)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x = \int\limits_0^x \int\limits_0^1 f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y.$ ☐ I; ■ H;

7. Az $y'(x) = \mathrm{sh}(x)(y(x) - 1)$ differenciálegyenlet

elsőrendű ■ I; ☐ H;
homogén lineáris ☐ I; ■ H;
szeparálható ■ I; ☐ H;

[1] A helyes megoldás előtti négyzetet **satírozza be**! Helyes válasz: 5 pont; helytelen vagy nem egyértelmű válasz: 0 pont.
[2] A helyes válasz előtti négyzetet **satírozza be**! Helyes válasz: 3 pont; nem egyértelmű válasz: 0 pont; helytelen válasz: -3 pont, azonban egy-egy feladat teljes pontszáma nem csökken nulla alá.

*** 1. feladat (12+12=24 pont)**
Számítsuk ki az $\int\limits_H f$ integrál értékét, ahol

a)

$$f(x,y) := 2x^2y \qquad \big((x,y) \in \mathbb{R}^2\big),$$

H pedig az első síknegyed ($x \geq 0$, $y \geq 0$) azon korlátos részhalmaza, amelyet koordinátatengelyek és az $y^2 = 1 - x$ egyenletű parabola határolnak;

b)

$$f(x,y) := (x^2+y^2)^{\frac{3}{2}} \qquad \big((x,y) \in \mathbb{R}^2\big),$$
$$H := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2 \leq 1,\ 0 \leq y \leq \sqrt{3}x\}.$$

*** 2. feladat (10 pont)**
Legyen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ abszolút integrálható függvény. Fejezzük ki az

$$\mathscr{F}(x \mapsto f'(2x+1))$$

Fourier-transzformáltat az f függvény Fourier-transzformáltja segítségével.

3. feladat (6+10=16 pont)
Mondjuk ki és bizonyítsuk be a hatvány(függvény-)sorok abszolút és egyenletes konvergenciájáról szóló tételt.

4. feladat (plusz 10 pontért)
Legyen

$$f(x,y) := \begin{cases} \dfrac{x^3y}{x^4+y^2} & \text{, ha } (x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \\ 0 & \text{, ha } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

Folytonos-e az f függvény? (Tanács: polárkoordináták helyett inkább próbáljunk ügyesen felülről becsülni.)

2024.06.11.
Analízis 2. informatikusoknak vizsga, feleletválasztós rész (50 pont)

$\boldsymbol{\alpha}$ ■, $\boldsymbol{\beta}$ ☐

címke névvel, Neptun kóddal

Válassza ki az egyetlen helyes megoldást![1] ($4 \times 5 = 20$ pont)

1. $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{\sin(xy)}{|y|} = ?$

☐ 0; ☐ 1; ☐ -1; ☐ nem létezik; ☐ más válasz.

2. Azon legalacsonyabbrendű, lineáris, állandó együtthatós, homogén differenciálegyenlet rendje, amelynek megoldása az $y(x) := \sin(2x) + x^4 e^x \quad (x \in \mathbb{R})$ függvény:

☐ 3; ☐ 4; ☐ 5; ☐ 6; ☐ 7; ☐ más válasz.

3. Legyen $f(x,y) := \sqrt{x^2+y^2} \quad ((x,y) \in \mathbb{R}^2)$, és jelölje D az origó középpontú 2 sugarú zárt körlapot.

☐ Az f függvénynek létezik maximuma és minimuma a D halmazon;

☐ Az f függvénynek nem létezik maximuma a D halmazon, minimuma viszont igen, amit az origóban vesz fel;

☐ Az f függvénynek se maximuma se mimuma nem létezik a D halmazon.

☐ A fenti állítások közül egyik sem igaz.

4. $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{2^n (x+1)^{2n+2}}{(2n+1)!} = ? \quad (x \in \mathbb{R})$

☐ $\mathrm{sh}(2x+2)$; ☐ $2(x+1)\,\mathrm{sh}(x+1)$; ☐ $\dfrac{2^n\,\mathrm{ch}(x+1)}{(x+1)^2(2n+1)}$; ☐ $\frac{(x+1)}{\sqrt{2}}\,\mathrm{sh}\left(\sqrt{2}(x+1)\right)$; ☐ más válasz.

Minden állításról döntse el, hogy igaz (I) vagy hamis (H)![2] ($10 \times 3 = 30$ pont)

5. Az $f(n) = -\frac{3}{2} f(n-1) + f(n-2) \quad (n \in \mathbb{N},\ n \geq 2)$ lineáris rekurziónak

a) létezik $+\infty$-hez tartó megoldása; ☐ I; ☐ H;
b) létezik divergens megoldása; ☐ I; ☐ H;
c) létezik 0-tól különböző konstans megoldása. ☐ I; ☐ H;

6. Legyen $f(x,y) = |x| \cdot y^3$, a teljes $\mathbb{R}^2$ síkon értelmezett függvény.

f folytonos az origóban. ☐ I; ☐ H;
f-nek lokális szélsőértéke van az origóban. ☐ I; ☐ H;
f-nek léteznek a parciális deriváltjai az origóban. ☐ I; ☐ H;

7. Legyen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tetszőleges valós számsorozat.

Ha minden $n \in \mathbb{N}^+$ esetén $a_n \leq \dfrac{1}{n^2}$, akkor a $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} a_n$ numerikus sor konvergens. ☐ I; ☐ H;

Ha minden $n \in \mathbb{N}^+$ esetén $a_n \geq \dfrac{1}{n}$, akkor a $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} a_n$ numerikus sor divergens. ☐ I; ☐ H;

Ha minden $n \in \mathbb{N}^+$ esetén $a_n \leq \dfrac{(-1)^n}{n}$, akkor a $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} a_n$ numerikus sor feltételesen konvergens. ☐ I; ☐ H;

Ha minden $n \in \mathbb{N}$ esetén $\sqrt[n]{|a_n|} \geq 1$, akkor a $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} a_n$ numerikus divergens. ☐ I; ☐ H;

[1] A helyes megoldás előtti négyzetet **satírozza be**! Helyes válasz: 5 pont; helytelen vagy nem egyértelmű válasz: 0 pont.

[2] A helyes válasz előtti négyzetet **satírozza be**! Helyes válasz: 3 pont; nem egyértelmű válasz: 0 pont; helytelen válasz: -3 pont, azonban egy-egy feladat teljes pontszáma nem csökken nulla alá.

2024.06.11.
Analízis 2. informatikusoknak vizsga, feleletválasztós rész (50 pont)

címke névvel, Neptun kóddal

$\boldsymbol{\alpha}$ ☐, $\boldsymbol{\beta}$ ■

Válassza ki az egyetlen helyes megoldást![1] **($4 \times 5 = 20$ pont)**

1. $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sin(xy)}{\sqrt{|xy|}} = ?$

☐ 0; ☐ 1; ☐ -1; ☐ nem létezik; ☐ más válasz.

2. Azon legalacsonyabbrendű, lineáris, állandó együtthatós, homogén differenciálegyenlet rendje, amelynek megoldása az $y(x) := x\sin(2x) + xe^x \quad (x \in \mathbb{R})$ függvény:

☐ 3; ☐ 4; ☐ 5; ☐ 6; ☐ 7; ☐ más válasz.

3. Legyen

$$f(x,y) := \begin{cases} \dfrac{1}{x^2+y^2} & \text{, ha } (x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \\ 0 & \text{, ha } (x,y) = (0,0), \end{cases}$$

és jelölje D az origó középpontú 1 sugarú zárt körlapot.

☐ Az f függvénynek létezik maximuma és minimuma a D halmazon;

☐ Az f függvénynek nem létezik maximuma a D halmazon, minimuma viszont igen, amit az origóban vesz fel;

☐ Az f függvénynek se maximuma se mimuma nem létezik a D halmazon.

☐ A fenti állítások közül egyik sem igaz.

4. $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^n(x+1)^{2n+1}}{(2n)!} = ? \quad (x \in \mathbb{R})$

☐ $\operatorname{ch}(3x+3)$; ☐ $3(x+1)\operatorname{ch}(x+1)$; ☐ $(x+1)\operatorname{ch}\left(\sqrt{3}(x+1)\right)$;

☐ $\dfrac{3^n \operatorname{sh}(x+1)}{2n+1}$; ☐ más válasz.

Minden állításról döntse el, hogy igaz (I) vagy hamis (H)![2] **($10 \times 3 = 30$ pont)**

5. Az $f(n) = \frac{5}{2}f(n-1) + \frac{3}{2}f(n-2) \quad (n \in \mathbb{N},\, n \geq 2)$ lineáris rekurziónak

a) létezik $+\infty$-hez tartó megoldása; ☐ I; ☐ H;
b) nincs konvergens megoldása; ☐ I; ☐ H;
c) létezik konstans megoldása. ☐ I; ☐ H;

6. Legyen $f(x,y) = x^2 \cdot |y|$, a teljes $\mathbb{R}^2$ síkon értelmezett függvény.

f folytonos az origóban. ☐ I; ☐ H;
f-nek lokális szélsőértéke van az origóban. ☐ I; ☐ H;
f-nek nem létezik minden parciális deriváltja az origóban. ☐ I; ☐ H;

7. Legyen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tetszőleges valós számsorozat.

Ha minden $n \in \mathbb{N}^+$ esetén $a_n \leq \dfrac{1}{n^2}$, akkor a $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} a_n$ numerikus sor konvergens. ☐ I; ☐ H;

Ha minden $n \in \mathbb{N}^+$ esetén $a_n \geq \dfrac{1}{n}$, akkor a $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} a_n$ numerikus sor divergens. ☐ I; ☐ H;

Ha minden $n \in \mathbb{N}^+$ esetén $|a_n| \leq \dfrac{1}{n}$, akkor a $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} a_n$ numerikus sor feltételesen konvergens. ☐ I; ☐ H;

Ha minden $n \in \mathbb{N}$ esetén $\sqrt[n]{|a_n|} < 1$, akkor a $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} a_n$ numerikus konvergens. ☐ I; ☐ H;

---

[1] A helyes megoldás előtti négyzetet **satírozza be**! Helyes válasz: 5 pont; helytelen vagy nem egyértelmű válasz: 0 pont.

[2] A helyes válasz előtti négyzetet **satírozza be**! Helyes válasz: 3 pont; nem egyértelmű válasz: 0 pont; helytelen válasz: -3 pont, azonban egy-egy feladat teljes pontszáma nem csökken nulla alá.

*** 1. feladat (12+12=24 pont)**
Számítsuk ki az $\int\limits_H f$ integrál értékét, ahol

a)

$$f(x,y) := 2x^2y \qquad \big((x,y)\in\mathbb{R}^2\big),$$

H pedig az első síknegyed ($x \geq 0$, $y \geq 0$) azon korlátos részhalmaza, amelyet koordinátatengelyek és az $y^2 = 1-x$ egyenletű parabola határolnak;

b)

$$f(x,y) := (x^2+y^2)^{\frac{3}{2}} \qquad \big((x,y)\in\mathbb{R}^2\big),$$
$$H := \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2 \leq 1,\ 0\leq y\leq \sqrt{3}x\}.$$

Mo. *a) 1. megoldás.*

$$H = \big\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid 0\leq x\leq 1,\ 0\leq y\leq\sqrt{1-x}\big\}, \quad \textbf{(1p)}.$$

H normáltartomány, f folytonos H-n **(1p)** , tehát:

$$\int\limits_H f \overset{\textbf{(2p)}}{=} \int\limits_0^1 \int\limits_0^{\sqrt{1-x}} 2x^2y\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x \overset{\textbf{(2p)}}{=} \int\limits_0^1 \big[x^2y^2\big]_{y=0}^{\sqrt{1-x}}\,\mathrm{d}x \overset{\textbf{(2p)}}{=} \int\limits_0^1 x^2(1-x)\,\mathrm{d}x \overset{\textbf{(2p)}}{=} \left[\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}\right]_{x=0}^1 \overset{\textbf{(2p)}}{=} \frac{1}{12}.$$

2. megoldás. $H = \big\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid 0\leq y\leq 1,\ 0\leq x\leq 1-y^2\big\}, \quad \textbf{(1p)}.$

H normáltartomány, f folytonos H-n **(1p)** , tehát:

$$\int\limits_H f \overset{\textbf{(2p)}}{=} \int\limits_0^1 \int\limits_0^{1-y^2} 2x^2y\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \overset{\textbf{(2p)}}{=} 2\int\limits_0^1 \left[\frac{x^3y}{3}\right]_{x=0}^{1-y^2}\,\mathrm{d}x \overset{\textbf{(2p)}}{=} -\frac{1}{3}\int\limits_0^1 (1-y^2)^3\cdot(-2y)\,\mathrm{d}x \overset{\textbf{(2p)}}{=} -\frac{1}{3}\left[\frac{(1-y^2)^4}{4}\right]_{y=0}^1 \overset{\textbf{(2p)}}{=} \frac{1}{12}.$$

b) Polártranszformációval, $H = \underline{P}\langle[0,1]\times\big[0,\frac{\pi}{3}\big]\rangle$ **(1p)**

$$\int\limits_H f \overset{\textbf{(3p)}}{=} \int\limits_0^1 \int\limits_0^{\frac{\pi}{3}} f(r\cos(\varphi), r\sin(\varphi))\cdot r\,\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}r \overset{\textbf{(2p)}}{=} 2\int\limits_0^1 \int\limits_0^{\frac{\pi}{3}} r^4\,\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}r \overset{\textbf{(3p)}}{=} \frac{\pi}{3}\int\limits_0^1 r^4\,\mathrm{d}r \overset{\textbf{(2p)}}{=} \frac{\pi}{3}\left[\frac{r^5}{5}\right]_{r=0}^1 \overset{\textbf{(1p)}}{=} \frac{\pi}{15}.$$

(Normáltartományos próbálkozásért maximum 2 pont adható.)

*** 2. feladat (10 pont)**
Legyen $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ abszolút integrálható függvény. Fejezzük ki az

$$\mathscr{F}(x\mapsto f'(2x+1))$$

Fourier-transzformáltat az f függvény Fourier-transzformáltja segítségével.

Mo. Minden $\omega\in\mathbb{R}$ esetén

$$\mathscr{F}(f')(\omega) = \mathbf{i}\omega\mathscr{F}(f)(\omega) \qquad \textbf{(3p)}$$
$$\mathscr{F}(x\mapsto f'(x+1))(\omega) = e^{\mathbf{i}\omega}\mathbf{i}\omega\mathscr{F}(f)(\omega) \qquad \textbf{(3p)}$$
$$\mathscr{F}(x\mapsto f'(2x+1))(\omega) = e^{\mathbf{i}\frac{\omega}{2}}\mathbf{i}\frac{\omega}{4}\mathscr{F}(f)\left(\frac{\omega}{2}\right) \qquad \textbf{(4p)}$$

Megjegyzés: Alternatív megoldásként szóba jöhet az $\mathscr{F}(x\mapsto g(2x+1))$ kiszámítása definíció segítségével majd ennek alkalmazása $g=f'$-re, illetve a lépések más sorrendben való elvégzése.
Minden elvi hibáért 3 pont levonás jár. Ha pl. a vizsgázó $\mathscr{F}(x\mapsto f(2x+1))(\omega)$-ról tér át $\mathscr{F}(x\mapsto f'(2x+1))(\omega)$-ra úgy, "elfelejt" 2-vel osztani, csak $\mathbf{i}\omega$-val szoroz, az elvi hibának számít.
A Fourier-transzformált definíciójának helyes felírásáért csak akkor jár pont (legfeljebb egy), ha a vizsgázó kezd is vele valamit.

3. feladat (6+10=16 pont)
Mondjuk ki és bizonyítsuk be a hatvány(függvény-)sorok abszolút és egyenletes konvergenciájáról szóló tételt.

Mo. *Tétel:* Legyen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ számsorozat, és $x_0 \in \mathbb{R}$. Ekkor a $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n(\mathrm{id}_{\mathbb{R}} - x_0)^n$ hatványfüggvény-sor abszolút konvergens az $]x_0 - R_a, x_0 + R_a[$ halmazon **(3p)** , és minden $\alpha, \beta \in]x_0 - R_a, x_0 + R_a[$ és $\alpha < \beta$ esetén egyenletesen konvergens az $[\alpha, \beta]$ intervallumon **(3p)** .

Bizonyítás: A hatványfüggvény-sor $]x_0 - R_a, x_0 + R_a[$ halmazon való abszolút konvergenciája következik a Cauchy – Hadamard-tételből **(2p)** .
Legyen $\alpha, \beta \in]x_0 - R_a, x_0 + R_a[$ és $\alpha < \beta$, továbbá

$$\gamma := \max\{|\alpha - x_0|, |\beta - x_0|\} \quad \textbf{(2p)}.$$

Ekkor minden $x \in [\alpha, \beta]$ és $n \in \mathbb{N}$ esetén

$$|a_n(x - x_0)^n| \le |a_n|\gamma^n \quad \Rightarrow \quad \|a_n(\mathrm{id}_{\mathbb{R}} - x_0)^n\|_{[\alpha,\beta]} \le |a_n|\gamma^n \quad \textbf{(3p)},$$

és a gyökkritérium (vagy a Cauchy – Hadamard-tétel) alapján a $\sum_{n\in\mathbb{N}} |a_n|\gamma^n$ numerikus sor konvergens **(1p)** , így a Weierstrass-kritérium **(1p)** szerint a $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n(\mathrm{id}_{\mathbb{R}} - x_0)^n$ hatványfüggvény-sor egyenletesen konvergens az $[\alpha, \beta]$ intervallumon **(1p)** .

4. feladat (plusz 10 pontért)
Legyen

$$f(x, y) := \begin{cases} \dfrac{x^3 y}{x^4 + y^2} & , \text{ha } (x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\} \\ 0 & , \text{ha } (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

Folytonos-e az f függvény? (Tanács: polárkoordináták helyett inkább próbáljunk ügyesen felülről becsülni.)

Mo. Az origóbeli folytonosság fogja eldönteni a kérdést **(1p)** , ahhoz pedig elég az origóbeli határértéket vizsgálni. Legyen $(x_k, y_k)_{k\in\mathbb{N}}$ egy $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$-ban haladó sorozat, amely tart az origóhoz.

Ekkor

$$|f(x_k, y_k)| \overset{\textbf{(2p)}}{=} |x_k| \frac{x_k^2 |y_k|}{x_k^4 + y_k^2} \overset{\textbf{(5p)}}{\le} |x_k| \frac{x_k^4 + y_k^2}{2(x_k^4 + y_k^2)} = \frac{|x_k|^2}{2} \overset{k\to\infty}{\longrightarrow} 0 \quad \textbf{(1p)}$$

Ebből adódóan $f(x_k, y_k) \overset{k\to\infty}{\longrightarrow} 0$, azaz az átviteli elv (valamint a határérték és folytonosság kapcsolatáról szóló tétel alapján) f folytonos az origóban **(1p)** , és az értelmezési tartományának minden más pontjában is, tehát folytonos.

Megjegyzés: Origón átmenő egyenesek mentén való próbálkozásért nem jár pont, polárkoordinátás helyettesítésért pedig csak akkor, ha vezet valahova.

2024.06.11.
Analízis 2. informatikusoknak vizsga, feleletválasztós rész (50 pont)

címke névvel, Neptun kóddal

$\boldsymbol{\alpha}$ ■, $\boldsymbol{\beta}$ □

Válassza ki az egyetlen helyes megoldást![1] **($4 \times 5 = 20$ pont)**

1. $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sin(xy)}{|y|} = ?$

■ 0; □ 1; □ -1; □ nem létezik; □ más válasz.

2. Azon legalacsonyabbrendű, lineáris, állandó együtthatós, homogén differenciálegyenlet rendje, amelynek megoldása az $y(x) := \sin(2x) + x^4 e^x \quad (x \in \mathbb{R})$ függvény:

□ 3; □ 4; □ 5; □ 6; ■ 7; □ más válasz.

3. Legyen $f(x,y) := \sqrt{x^2+y^2} \quad ((x,y) \in \mathbb{R}^2)$, és jelölje D az origó középpontú 2 sugarú zárt körlapot.

■ Az f függvénynek létezik maximuma és minimuma a D halmazon;

□ Az f függvénynek nem létezik maximuma a D halmazon, minimuma viszont igen, amit az origóban vesz fel;

□ Az f függvénynek se maximuma se mimuma nem létezik a D halmazon.

□ A fenti állítások közül egyik sem igaz.

4. $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n (x+1)^{2n+2}}{(2n+1)!} = ? \quad (x \in \mathbb{R})$

□ $\operatorname{sh}(2x+2)$; □ $2(x+1)\operatorname{sh}(x+1)$; □ $\dfrac{2^n \operatorname{ch}(x+1)}{(x+1)^2(2n+1)}$;

■ $\frac{(x+1)}{\sqrt{2}} \operatorname{sh}\left(\sqrt{2}(x+1)\right)$; □ más válasz.

Minden állításról döntse el, hogy igaz (I) vagy hamis (H)![2] **($10 \times 3 = 30$ pont)**

5. Az $f(n) = -\frac{3}{2} f(n-1) + f(n-2) \quad (n \in \mathbb{N},\ n \geq 2)$ lineáris rekurziónak

a) létezik $+\infty$-hez tartó megoldása; □ I; ■ H;
b) létezik divergens megoldása; ■ I; □ H;
c) létezik 0-tól különböző konstans megoldása. □ I; ■ H;

6. Legyen $f(x,y) = |x| \cdot y^3$, a teljes $\mathbb{R}^2$ síkon értelmezett függvény.

f folytonos az origóban. ■ I; □ H;
f-nek lokális szélsőértéke van az origóban. □ I; ■ H;
f-nek léteznek a parciális deriváltjai az origóban. ■ I; □ H;

7. Legyen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tetszőleges valós számsorozat.

Ha minden $n \in \mathbb{N}^+$ esetén $a_n \leq \dfrac{1}{n^2}$, akkor a $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n$ numerikus sor konvergens. □ I; ■ H;

Ha minden $n \in \mathbb{N}^+$ esetén $a_n \geq \dfrac{1}{n}$, akkor a $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n$ numerikus sor divergens. ■ I; □ H;

Ha minden $n \in \mathbb{N}^+$ esetén $a_n \leq \dfrac{(-1)^n}{n}$, akkor a $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n$ numerikus sor feltételesen konvergens. □ I; ■ H;

Ha minden $n \in \mathbb{N}$ esetén $\sqrt[n]{|a_n|} \geq 1$, akkor a $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n$ numerikus divergens. ■ I; □ H;

[1] A helyes megoldás előtti négyzetet **satírozza be**! Helyes válasz: 5 pont; helytelen vagy nem egyértelmű válasz: 0 pont.
[2] A helyes válasz előtti négyzetet **satírozza be**! Helyes válasz: 3 pont; nem egyértelmű válasz: 0 pont; helytelen válasz: -3 pont, azonban egy-egy feladat teljes pontszáma nem csökken nulla alá.

2024.06.11.
Analízis 2. informatikusoknak vizsga, feleletválasztós rész (50 pont)

címke névvel, Neptun kóddal

$\boldsymbol{\alpha}$ ☐, $\boldsymbol{\beta}$ ■

Válassza ki az egyetlen helyes megoldást![1] **(4 × 5 = 20 pont)**

1. $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{\sin(xy)}{\sqrt{|xy|}} = ?$

■ 0; ☐ 1; ☐ −1; ☐ nem létezik; ☐ más válasz.

2. Azon legalacsonyabbrendű, lineáris, állandó együtthatós, homogén differenciálegyenlet rendje, amelynek megoldása az $y(x) := x\sin(2x) + xe^x \quad (x \in \mathbb{R})$ függvény:

☐ 3; ☐ 4; ☐ 5; ■ 6; ☐ 7; ☐ más válasz.

3. Legyen

$$f(x,y) := \begin{cases} \dfrac{1}{x^2+y^2} & \text{, ha } (x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \\ 0 & \text{, ha } (x,y) = (0,0), \end{cases}$$

és jelölje D az origó középpontú 1 sugarú zárt körlapot.

☐ Az f függvénynek létezik maximuma és minimuma a D halmazon;

■ Az f függvénynek nem létezik maximuma a D halmazon, minimuma viszont igen, amit az origóban vesz fel;

☐ Az f függvénynek se maximuma se mimuma nem létezik a D halmazon.

☐ A fenti állítások közül egyik sem igaz.

4. $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{3^n (x+1)^{2n+1}}{(2n)!} = ? \quad (x \in \mathbb{R})$

☐ $\mathrm{ch}(3x+3)$; ☐ $3(x+1)\,\mathrm{ch}(x+1)$; ■ $(x+1)\,\mathrm{ch}\left(\sqrt{3}(x+1)\right)$; ☐ $\dfrac{3^n\,\mathrm{sh}(x+1)}{2n+1}$; ☐ más válasz.

Minden állításról döntse el, hogy igaz (I) vagy hamis (H)![2] **(10 × 3 = 30 pont)**

5. Az $f(n) = \frac{5}{2}f(n-1) + \frac{3}{2}f(n-2) \quad (n \in \mathbb{N},\, n \geq 2)$ lineáris rekurziónak

a) létezik $+\infty$-hez tartó megoldása; ■ I; ☐ H;
b) nincs konvergens megoldása; ☐ I; ■ H;
c) létezik konstans megoldása. ■ I; ☐ H;

6. Legyen $f(x,y) = x^2 \cdot |y|$, a teljes $\mathbb{R}^2$ síkon értelmezett függvény.

f folytonos az origóban. ■ I; ☐ H;
f-nek lokális szélsőértéke van az origóban. ■ I; ☐ H;
f-nek nem létezik minden parciális deriváltja az origóban. ☐ I; ■ H;

7. Legyen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tetszőleges valós számsorozat.

Ha minden $n \in \mathbb{N}^+$ esetén $a_n \leq \dfrac{1}{n^2}$, akkor a $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} a_n$ numerikus sor konvergens. ☐ I; ■ H;

Ha minden $n \in \mathbb{N}^+$ esetén $a_n \geq \dfrac{1}{n}$, akkor a $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} a_n$ numerikus sor divergens. ■ I; ☐ H;

Ha minden $n \in \mathbb{N}^+$ esetén $|a_n| \leq \dfrac{1}{n}$, akkor a $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} a_n$ numerikus sor feltételesen konvergens. ☐ I; ■ H;

Ha minden $n \in \mathbb{N}$ esetén $\sqrt[n]{|a_n|} < 1$, akkor a $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} a_n$ numerikus konvergens. ☐ I; ■ H;

---

[1] A helyes megoldás előtti négyzetet **satírozza be**! Helyes válasz: 5 pont; helytelen vagy nem egyértelmű válasz: 0 pont.

[2] A helyes válasz előtti négyzetet **satírozza be**! Helyes válasz: 3 pont; nem egyértelmű válasz: 0 pont; helytelen válasz: -3 pont, azonban egy-egy feladat teljes pontszáma nem csökken nulla alá.

*** 1. feladat (12+12=24 pont)**

a)

$$\int_0^1 \int_y^1 \sin(x^2)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = ?$$

(Próbálkozzunk az integrálok sorrendjének felcserélésével.)

b)

$$\int_H \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\,\mathrm{d}(x,y,z) = ?,$$

ahol $H := \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid 4 \le x^2+y^2 \le 9,\ y \ge 0,\ 0 \le z \le 2\}$

*** 2. feladat (6+4=10 pont)**
Legyen f az a 2π szerint periodikus függvény, amelyre

$$f(x) := \begin{cases} x^2+\pi & , \text{ha } x \in [-\pi, 0[\\ -x & , \text{ha } x \in [0, \pi[\,. \end{cases}$$

a) Jelölje Φ az f függvény Fourier-sorának összegfüggvényét. Adjuk meg a $\Phi(0)$ és $\Phi(1)$ értékeket
b) Egyenletesen konvergens-e $\mathbb{R}$-en az f függvény Fourier-sora? (Indokoljunk.)

3. feladat (6+10=16 pont)
Mondjuk ki és bizonyítsuk be a numerikus sorokra vonatkozó hányadoskritériumot. (Bármelyik verziót.)

4. feladat (plusz 10 pontért)
Legyen $n \in \mathbb{N}^+$. Bizonyítsuk be, hogy ha az $\mathbb{R}^n$-beli A és B halmazok nyíltak, akkor $A \cap B$ is nyílt.

A *-gal jelölt feladatokból legalább 11 pontot el kell érni az elégségeshez.

2024.06.18.
Analízis 2. informatikusoknak vizsga, feleletválasztós rész (50 pont)

címke névvel, Neptun kóddal

$\boldsymbol{\alpha}$ ■, $\boldsymbol{\beta}$ □

Válassza ki az egyetlen helyes megoldást![1] ($\mathbf{4 \times 5 = 20}$ pont)

1. $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{2xy}{x^2+y^2} =?$

□ 0; □ 1; □ -1; □ nem létezik; □ más válasz.

2. Az $y'' + 4y' + 4y = 0$ differenciálegyenlet általános megoldása $y_á(x) = \dots$ $\quad (C_1, C_2 \in \mathbb{R},\ x \in \mathbb{R})$

□ $C_1 e^{2x}$; □ $C_1 e^{-2x}$; □ $C_1 e^{2x} + C_2 x e^{2x}$;
□ $C_1 e^{2x} + C_2 e^{-2x}$; □ $C_1 e^{-2x} + C_2 x e^{-2x}$; □ más válasz.

3. Legyen

$$f(x,y) := \begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} & \text{, ha } (x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \\ 0 & \text{, ha } (x,y) = (0,0), \end{cases}$$

□ Az f függvénynek létezik lokális maximuma és lokális minimuma is;
□ Az f függvénynek nem létezik lokális maximuma, és létezik lokális minimuma;
□ Az f függvénynek létezik lokális maximuma, és nem létezik lokális minimuma;
□ Az f függvénynek nem létezik lokális szélsőértéke.

4. A $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} \dfrac{x^n}{(-2)^n n^3}$ $\quad (x \in \mathbb{R})$ sor pontosan akkor konvergens, ha $x \in \dots$

□ $]-2,2]$; □ $[-2,2]$; □ $]-\frac{1}{2},\frac{1}{2}]$; □ $[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}]$; □ más válasz.

Minden állításról döntse el, hogy igaz (I) vagy hamis (H)![2] ($\mathbf{10 \times 3 = 30}$ pont)

5. Az $y'(x)x^3 - 2y^2(x) = 0 \quad (x \in \mathbb{R})$ differenciálegyenlet

szeparálható; □ I; □ H;
megoldása az $x \mapsto x^2 \quad (x \in \mathbb{R})$ függvény; □ I; □ H;
$K = 0$-hoz tatozó izoklinája tartalmazza az $(1,1)$ pontot. □ I; □ H;

6. Legyen $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ egy tetszőleges függvény.

Ha f (totálisan) deriválható egy (x_0, y_0) pontban, akkor ott minden esetben folytonos is. □ I; □ H;

Ha f-nek egy (x_0, y_0) pontban mindkét parciális deriváltja nulla, akkor ebben a pontban minden iránymenti derivált is nulla. □ I; □ H;

Ha f-nek léteznek a parciális deriváltjai egy (x_0, y_0) pontban, akkor f ebben a pontban folytonos. □ I; □ H;

Ha f folytonos egy (x_0, y_0) pontban, akkor ebben a pontban f-nek minden esetben létezik a gradiense. □ I; □ H;

7. Legyen $a_n = \cos(n\pi)\dfrac{3^{2n-1}}{n^2 \cdot 9^n}$.

A $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ sor Leibniz típusú. □ I; □ H;
A $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ sor konvergens. □ I; □ H;
A $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ sor nem abszolút konvergens. □ I; □ H;

[1] A helyes megoldás előtti négyzetet **satírozza be**! Helyes válasz: 5 pont; helytelen vagy nem egyértelmű válasz: 0 pont.

[2] A helyes válasz előtti négyzetet **satírozza be**! Helyes válasz: 3 pont; nem egyértelmű válasz: 0 pont; helytelen válasz: -3 pont, azonban egy-egy feladat teljes pontszáma nem csökken nulla alá.

2024.06.18.
Analízis 2. informatikusoknak vizsga, feleletválasztós rész (50 pont)

címke névvel, Neptun kóddal

$\boldsymbol{\alpha}$ ☐, $\boldsymbol{\beta}$ ■

Válassza ki az egyetlen helyes megoldást![1] ($4 \times 5 = 20$ pont)

1. $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y}{x^2+y^2} = ?$

☐ 0; ☐ 1; ☐ -1; ☐ nem létezik; ☐ más válasz.

2. Az $y'' - 6y' + 9y = 0$ differenciálegyenlet általános megoldása $y_{á}(x) = \dots \quad (C_1, C_2 \in \mathbb{R},\ x \in \mathbb{R})$

☐ C_1e^{3x}; ☐ C_1e^{-3x} ; ☐ $C_1e^{3x} + C_2xe^{3x}$;
☐ $C_1e^{3x} + C_2e^{-3x}$; ☐ $C_1e^{-3x} + C_2xe^{-3x}$; ☐ más válasz.

3. Legyen

$$f(x,y) := \begin{cases} \dfrac{1}{x^2+y^2} & , \text{ ha } (x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \\ 0 & , \text{ ha } (x,y) = (0,0), \end{cases}$$

☐ Az f függvénynek létezik lokális maximuma és lokális minimuma is;
☐ Az f függvénynek nem létezik lokális maximuma, és létezik lokális minimuma;
☐ Az f függvénynek létezik lokális maximuma, és nem létezik lokális minimuma;
☐ Az f függvénynek nem létezik lokális szélsőértéke.

4. A $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{x^n}{(-3)^n n}$ $\quad (x \in \mathbb{R})$ sor pontosan akkor konvergens, ha $x \in \dots$

☐ $]-3, 3]$; ☐ $[-3, 3]$; ☐ $]-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}]$; ☐ $[-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}]$; ☐ más válasz.

Minden állításról döntse el, hogy igaz (I) vagy hamis (H)![2] ($10 \times 3 = 30$ pont)

5. A $2y'(x)x^3 - 4y^2(x) = 0 \quad (x \in \mathbb{R})$ differenciálegyenlet

lineáris;	☐ I; ☐ H;
megoldása az $x \mapsto x^2 \quad (x \in \mathbb{R})$ függvény;	☐ I; ☐ H;
$K = 2$-hoz tatozó izoklinája tartalmazza az $(1,1)$ pontot.	☐ I; ☐ H;

6. Legyen $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ egy tetszőleges függvény.

Ha f folytonos egy (x_0, y_0) pontban, akkor ott minden esetben deriválható is.	☐ I; ☐ H;
Ha f-nek léteznek a parciális deriváltjai egy (x_0, y_0) pontban, akkor f ebben a pontban folytonos.	☐ I; ☐ H;
Ha f-nek létezik a gradiense egy (x_0, y_0) pontban, akkor f ebben a pontban folytonos.	☐ I; ☐ H;
Ha f-nek egy (x_0, y_0) pontban mindkét parciális deriváltja nulla, akkor ebben a pontban minden iránymenti derivált is nulla.	☐ I; ☐ H;

7. Legyen $a_n = \cos(n\pi)\dfrac{2^{2n+1}}{n \cdot 4^n}$.

A $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ sor Leibniz típusú.	☐ I; ☐ H;
A $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ sor konvergens.	☐ I; ☐ H;
A $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ sor abszolút konvergens.	☐ I; ☐ H;

[1] A helyes megoldás előtti négyzetet **satírozza be**! Helyes válasz: 5 pont; helytelen vagy nem egyértelmű válasz: 0 pont.

[2] A helyes válasz előtti négyzetet **satírozza be**! Helyes válasz: 3 pont; nem egyértelmű válasz: 0 pont; helytelen válasz: -3 pont, azonban egy-egy feladat teljes pontszáma nem csökken nulla alá.

* 1. feladat (12+12=24 pont)

a)

$$\int_0^1 \int_y^1 \sin(x^2)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = ?$$

(Próbálkozzunk az integrálok sorrendjének felcserélésével.)

b)

$$\int_H \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\,\mathrm{d}(x,y,z) = ?,$$

ahol $H := \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, 4 \le x^2+y^2 \le 9,\ y \ge 0,\ 0 \le z \le 2\}$

Mo. *a*) Legyen $f(x,y) := \sin(x^2)$ $\big((x,y) \in \mathbb{R}^2\big)$ és $H := \{(x,y) \,|\, 0 \le y \le 1,\ y \le x \le 1\}$. Ekkor H normáltartomány és f folytonos **(1p)**, továbbá $H = \{(x,y) \,|\, 0 \le x \le 1,\ 0 \le y \le x\}$ **(1p)**

$$\int_0^1 \int_y^1 \sin(x^2)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_H f \overset{\textbf{(3p)}}{=} \int_0^1 \int_0^x \sin(x^2)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x \overset{\textbf{(2p)}}{=} \int_0^1 x\sin(x^2)\,\mathrm{d}x \overset{\textbf{(3p)}}{=}$$
$$= \frac{1}{2}\big[-\cos(x^2)\big]_{x=0}^1 \overset{\textbf{(2p)}}{=} \frac{1-\cos(1)}{2}.$$

b) Hengerkoordinátákkal, $H = \underline{C}\langle[2,3]\times[0,\pi]\times[0,2]\rangle$

$$\int_H f \overset{\textbf{(6p)}}{=} \int_2^3 \int_0^\pi \int_0^2 f(r\cos(\varphi), r\sin(\varphi), z)\cdot r\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}r \overset{\textbf{(3p)}}{=} \int_2^3 \int_0^\pi \int_0^2 1\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}r \overset{\textbf{(3p)}}{=} 2\pi.$$

(Normáltartományos próbálkozásért maximum 2 pont adható.)

---

* 2. feladat (6+4=10 pont)

Legyen f az a 2π szerint periodikus függvény, amelyre

$$f(x) := \begin{cases} x^2+\pi & \text{, ha } x \in [-\pi, 0[\\ -x & \text{, ha } x \in [0,\pi[\,. \end{cases}$$

a) Jelölje Φ az f függvény Fourier-sorának összegfüggvényét. Adjuk meg a $\Phi(0)$ és $\Phi(1)$ értékeket
b) Egyenletesen konvergens-e $\mathbb{R}$-en az f függvény Fourier-sora? (Indokoljunk.)

Mo. a) Az f függvényre teljesülnek a Dirichlet-tétel feltételei **(2p)**, ezért

$$\Phi(0) \overset{\textbf{(2p)}}{=} \frac{0+\pi}{2} = \frac{\pi}{2}, \qquad \Phi(1) \overset{\textbf{(2p)}}{=} f(1) = -1$$

b) Nem, mert ha egyenletesen konvergens lenne, akkor Φ folytonos lenne **(2p)**, azonban Φ pl. a 0-ban nem folytonos **(2p)**.

---

3. feladat (6+10=16 pont)
Mondjuk ki és bizonyítsuk be a numerikus sorokra vonatkozó hányadoskritériumot. (Bármelyik verziót.)

Mo. *Tétel:* Legyen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ pozitív tagú sorozat **(2p)** . Ekkor a következő állítások teljesülnek.

- Ha $\limsup\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} < 1$, akkor a $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} a_n$ sor konvergens. **(2p)**
- Ha $\liminf\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} > 1$, akkor a $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} a_n$ sor divergens. **(2p)**

(Egyéb verziók is elfogadhatók.)
Bizonyítás. Tegyük fel, hogy $\limsup\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} < 1$, és legyen $q \in \mathbb{R}$ olyan, hogy $\limsup\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} < q < 1$ **(2p)** . Ekkor létezik olyan $N \in \mathbb{N}$, hogy minden $n \in \mathbb{N}$ és $n \geq N$ esetén

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} < q \quad \Leftrightarrow \quad a_{n+1} \leq q a_n \quad (\mathbf{1p}).$$

Teljes indukcióval kapjuk, hogy minden $n \in \mathbb{N}$ és $n \geq N$ esetén

$$a_n \leq q^{n-N} a_N = q^n \frac{a_N}{q^N} \quad (\mathbf{2p}),$$

és $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} q^n \frac{a_N}{q^N}$ konvergens, tehát a majoráns kritérium alapján $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} a_n$ konvergens **(1p)** .
A második rész bizonyításához tegyük fel, hogy $\liminf\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} > 1$. Ekkor létezik olyan $N \in \mathbb{N}$, hogy minden $n \in \mathbb{N}$ és $n \geq N$ esetén

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} > 1 \quad \Leftrightarrow \quad a_{n+1} > a_n, \quad (\mathbf{2p}),$$

tehát teljes indukcióval kapjuk, hogy minden $n \in \mathbb{N}$ és $n \geq N$ esetén $a_n > a_N$ **(1p)** . Ez azt jelenti, hogy $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ nem tart 0-hoz így, azaz nem teljesül a sorok konvergenciájának szükséges feltétele **(1p)**, következésképpen $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} a_n$ divergens.

---

4. feladat (plusz 10 pontért)
Legyen $n \in \mathbb{N}^+$. Bizonyítsuk be, hogy ha az $\mathbb{R}^n$-beli A és B halmazok nyíltak, akkor $A \cap B$ is nyílt.

Mo. Ha $A \cap B = \emptyset$, akkor a nyíltság definíciója alapján teljesül az állítás **(2p)** . Ellenkező esetben legyen $\underline{x} \in A \cap B$ tetszőleges. Ekkor A és B nyíltsága alapján létezik olyan $r_1 > 0$ és $r_2 > 0$, hogy $B_{r_1}(\underline{x}) \subseteq A$, illetve $B_{r_2}(\underline{x}) \subseteq B$ **(4p)** , tehát az $r := \min\{r_1, r_2\}$ választással $B_r(\underline{x}) \subseteq A \cap B$ teljesül **(3p)**. Mivel $\underline{x}$ tetszőleges volt, ez azt jelenti, hogy $A \cap B$ nyílt **(1p)** .

2024.06.18.
Analízis 2. informatikusoknak vizsga, feleletválasztós rész (50 pont)

$\boldsymbol{\alpha}$ ■, $\boldsymbol{\beta}$ □

címke névvel, Neptun kóddal

Válassza ki az egyetlen helyes megoldást![1] **($4 \times 5 = 20$ pont)**

1. $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{2xy}{x^2+y^2} = ?$

□ 0; □ 1; □ -1; ■ nem létezik; □ más válasz.

2. Az $y'' + 4y' + 4y = 0$ differenciálegyenlet általános megoldása $y_{\text{á}}(x) = \ldots$ $\quad (C_1, C_2 \in \mathbb{R},\ x \in \mathbb{R})$

□ C_1e^{2x}; □ C_1e^{-2x} ; □ $C_1e^{2x} + C_2xe^{2x}$;
□ $C_1e^{2x} + C_2e^{-2x}$; ■ $C_1e^{-2x} + C_2xe^{-2x}$; □ más válasz.

3. Legyen

$$f(x,y) := \begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} & , \text{ ha } (x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \\ 0 & , \text{ ha } (x,y) = (0,0), \end{cases}$$

□ Az f függvénynek létezik lokális maximuma és lokális minimuma is;
■ Az f függvénynek nem létezik lokális maximuma, és létezik lokális minimuma;
□ Az f függvénynek létezik lokális maximuma, és nem létezik lokális minimuma;
□ Az f függvénynek nem létezik lokális szélsőértéke.

4. A $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} \dfrac{x^n}{(-2)^n n^3}$ $\quad (x \in \mathbb{R})$ sor pontosan akkor konvergens, ha $x \in \ldots$

□ $]-2, 2]$; ■ $[-2, 2]$; □ $]-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$; □ $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$; □ más válasz.

Minden állításról döntse el, hogy igaz (I) vagy hamis (H)![2] **($10 \times 3 = 30$ pont)**

5. Az $y'(x)x^3 - 2y^2(x) = 0 \quad (x \in \mathbb{R})$ differenciálegyenlet

szeparálható;	■ I;	□ H;
megoldása az $x \mapsto x^2 \quad (x \in \mathbb{R})$ függvény;	■ I;	□ H;
$K = 0$-hoz tatozó izoklinája tartalmazza az $(1,1)$ pontot.	□ I;	■ H;

6. Legyen $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ egy tetszőleges függvény.

Ha f (totálisan) deriválható egy (x_0, y_0) pontban, akkor ott minden esetben folytonos is.	■ I;	□ H;
Ha f-nek egy (x_0, y_0) pontban mindkét parciális deriváltja nulla, akkor ebben a pontban minden iránymenti derivált is nulla.	□ I;	■ H;
Ha f-nek léteznek a parciális deriváltjai egy (x_0, y_0) pontban, akkor f ebben a pontban folytonos.	□ I;	■ H;
Ha f folytonos egy (x_0, y_0) pontban, akkor ebben a pontban f-nek minden esetben létezik a gradiense.	□ I;	■ H;

7. Legyen $a_n = \cos(n\pi)\dfrac{3^{2n-1}}{n^2 \cdot 9^n}$.

A $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ sor Leibniz típusú.	■ I;	□ H;
A $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ sor konvergens.	■ I;	□ H;
A $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ sor nem abszolút konvergens.	□ I;	■ H;

[1] A helyes megoldás előtti négyzetet **satírozza be**! Helyes válasz: 5 pont; helytelen vagy nem egyértelmű válasz: 0 pont.
[2] A helyes válasz előtti négyzetet **satírozza be**! Helyes válasz: 3 pont; nem egyértelmű válasz: 0 pont; helytelen válasz: -3 pont, azonban egy-egy feladat teljes pontszáma nem csökken nulla alá.

2024.06.18.
Analízis 2. informatikusoknak vizsga, feleletválasztós rész (50 pont)

címke névvel, Neptun kóddal

$\boldsymbol{\alpha}$ □, $\boldsymbol{\beta}$ ■

Válassza ki az egyetlen helyes megoldást![1] **($4 \times 5 = 20$ pont)**

1. $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^2y}{x^2+y^2} =?$

■ 0; □ 1; □ -1; □ nem létezik; □ más válasz.

2. Az $y'' - 6y' + 9y = 0$ differenciálegyenlet általános megoldása $y_á(x) = \dots$ $(C_1, C_2 \in \mathbb{R},\ x \in \mathbb{R})$

□ C_1e^{3x}; □ C_1e^{-3x} ; ■ $C_1e^{3x} + C_2xe^{3x}$;
□ $C_1e^{3x} + C_2e^{-3x}$; □ $C_1e^{-3x} + C_2xe^{-3x}$; □ más válasz.

3. Legyen

$$f(x,y) := \begin{cases} \dfrac{1}{x^2+y^2} & \text{, ha } (x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \\ 0 & \text{, ha } (x,y) = (0,0), \end{cases}$$

□ Az f függvénynek létezik lokális maximuma és lokális minimuma is;
■ Az f függvénynek nem létezik lokális maximuma, és létezik lokális minimuma;
□ Az f függvénynek létezik lokális maximuma, és nem létezik lokális minimuma;
□ Az f függvénynek nem létezik lokális szélsőértéke.

4. A $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} \dfrac{x^n}{(-3)^n n}$ $(x \in \mathbb{R})$ sor pontosan akkor konvergens, ha $x \in \dots$

■ $]-3,3]$; □ $[-3,3]$; □ $]-\frac{1}{3},\frac{1}{3}]$; □ $[-\frac{1}{3},\frac{1}{3}]$; □ más válasz.

Minden állításról döntse el, hogy igaz (I) vagy hamis (H)![2] **($10 \times 3 = 30$ pont)**

5. A $2y'(x)x^3 - 4y^2(x) = 0$ $(x \in \mathbb{R})$ differenciálegyenlet

lineáris; □ I; ■ H;
megoldása az $x \mapsto x^2$ $(x \in \mathbb{R})$ függvény; ■ I; □ H;
$K = 2$-hoz tatozó izoklinája tartalmazza az $(1,1)$ pontot. ■ I; □ H;

6. Legyen $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ egy tetszőleges függvény.

Ha f folytonos egy (x_0, y_0) pontban, akkor ott minden esetben deriválható is. □ I; ■ H;
Ha f-nek léteznek a parciális deriváltjai egy (x_0, y_0) pontban, akkor f ebben a pontban folytonos. □ I; ■ H;
Ha f-nek létezik a gradiense egy (x_0, y_0) pontban, akkor f ebben a pontban folytonos. ■ I; □ H;
Ha f-nek egy (x_0, y_0) pontban mindkét parciális deriváltja nulla, akkor ebben a pontban minden iránymenti derivált is nulla. □ I; ■ H;

7. Legyen $a_n = \cos(n\pi)\dfrac{2^{2n+1}}{n \cdot 4^n}$.

A $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ sor Leibniz típusú. ■ I; □ H;
A $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ sor konvergens. ■ I; □ H;
A $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ sor abszolút konvergens. □ I; ■ H;

[1] A helyes megoldás előtti négyzetet **satírozza be**! Helyes válasz: 5 pont; helytelen vagy nem egyértelmű válasz: 0 pont.
[2] A helyes válasz előtti négyzetet **satírozza be**! Helyes válasz: 3 pont; nem egyértelmű válasz: 0 pont; helytelen válasz: -3 pont, azonban egy-egy feladat teljes pontszáma nem csökken nulla alá.

*** 1. feladat (12+12=24 pont)**
Számítsuk ki az $\int\limits_H f$ integrál értékét, ahol

a)
$$f(x,y) := 2xy \qquad \big((x,y)\in\mathbb{R}^2\big)\,,$$
H pedig az $y = x$ és $y = x^2$ egyenletű alakzatok által határolt korlátos tartomány;

b)
$$f(x,y.z) := \sqrt{x^2+y^2} \qquad \big((x,y,z)\in\mathbb{R}^2\big)\,,$$
$$H := \{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \,|\, x^2+y^2 \le 4,\ 0 \le z \le x^2+y^2\}.$$

*** 2. feladat (10 pont)**
Legyen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ abszolút integrálható függvény. Fejezzük ki az
$$\mathscr{F}\big(x \mapsto f(2x+3)\big)$$
Fourier-transzformáltat az f függvény Fourier-transzformáltjának segítségével.

3. feladat (6+10=16 pont)
a) Pontosan milyen $\alpha\in\mathbb{R}$ esetén konvergens a $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}^+} \frac{1}{n^\alpha}$ sor?
b) Bizonyítsuk az *a*) pontban megfogalmazott állítást $\alpha \neq 1$ esetén. (Az előadáson tanult tételt felhasználhatunk a bizonyításban.)

4. feladat (plusz 10 pontért)
Adjunk példát olyan $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ függvénysorozatra, amely pontonként konvergens a $[0,1]$ intervallumon, minden $n\in\mathbb{N}$ esetén f_n Riemann-integrálható a $[0,1]$ intervallumon, $f := \lim\limits_{n\to\infty} f_n$ Riemann-integrálható $[0,1]$-en, továbbá az $\left(\int\limits_0^1 f_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ számsorozat konvergens és $\int\limits_0^1 f_n \overset{n\to\infty}{\not\to} \int\limits_0^1 f$

2024.06.25.
Analízis 2. informatikusoknak vizsga, feleletválasztós rész (50 pont)

címke névvel, Neptun kóddal

$\boldsymbol{\alpha}$ ■, $\boldsymbol{\beta}$ □

Válassza ki az egyetlen helyes megoldást![1] **(4 × 5 = 20 pont)**

1. $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sin(xy^2)}{xy} \cdot \operatorname{arctg}\left(\frac{1}{x^2+y^2}\right) = ?$

□ 0; □ 1; □ -1; □ nem létezik; □ más válasz.

2. Az $y'''(x) - 2y''(x) + y'(x) = \sin(x) + 3$ differenciálegyenlet megoldásakor a próbafüggvényt $y(x) = \dots \quad (x \in \mathbb{R}, A, B, C \in \mathbb{R})$ alakban keressük.

□ $Ae^x + Bxe^x + C$; □ $A\sin(x) + B$; □ $A\sin(x) + Bx + C$;
□ $A\sin(x) + B\cos(x) + Cx$; □ $A\sin(x) + Bx^2 + Cx$; □ más válasz.

3. Legyen $f(x,y) := x^2 + y^3 - 2x - 3 \quad \big((x,y) \in \mathbb{R}^2\big)$. Az f függvény $(1,1)$ pontbeli iránymenti deriváltja az $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ vektor irányában:

□ 0; □ $\frac{1}{\sqrt{2}}$; □ $-\frac{3}{\sqrt{2}}$; □ $-\sqrt{2}$; □ más válasz.

4. $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{n+1}}{(2n)!} = \dots \quad (x \geq 0)$

□ $x\cos\left(\frac{x}{2}\right)$; □ $x\cos(\sqrt{x})$; □ $\sin\left(\frac{x}{2}\right)$; □ $xe^{-\frac{x}{2}}$; □ más válasz.

Minden állításról döntse el, hogy igaz (I) vagy hamis (H)![2] **(10 × 3 = 30 pont)**

5. A $2y'(x) - x^2 4y(x) = \cos(x) \quad (x \in \mathbb{R})$ differenciálegyenlet

homogén; □ I; □ H;
lineáris; □ I; □ H;
tetszőleges kezdeti feltétel mellett létezik és egyértelmű a megoldása. □ I; □ H;

6. $f(x) = \sqrt[4]{1 + 2x^3}$

A függvény 0 középontú, nyolcadfokú Taylor-polinomja 3 tagot tartalmaz. □ I; □ H;
A függvény 0 középpontú Taylor-sora mindenütt előállítja f-et. □ I; □ H;
A 0 középpontú Taylor-sorban az x^3 együtthatója $\dfrac{3}{8}$. □ I; □ H;

7. Legyen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tetszőleges valós számsorozat.

Ha a $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n$ numerikus sor minden átrendezése konvergens, akkor abszolút konvergens. □ I; □ H;
Ha a $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n$ numerikus sor konvergens, akkor minden $n \in \mathbb{N}^+$ esetén $a_n > \dfrac{1}{n}$. □ I; □ H;
Ha $\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} \leq 1$, akkor $a_n \xrightarrow{n\to\infty} 0$. □ I; □ H;
Ha minden $n \in \mathbb{N}^+$ esetén $0 \leq a_n \leq \dfrac{n!}{n^n}$, akkor a $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n$ numerikus sor abszolút konvergens. □ I; □ H;

[1] A helyes megoldás előtti négyzetet **satírozza be**! Helyes válasz: 5 pont; helytelen vagy nem egyértelmű válasz: 0 pont.
[2] A helyes válasz előtti négyzetet **satírozza be**! Helyes válasz: 3 pont; nem egyértelmű válasz: 0 pont; helytelen válasz: -3 pont, azonban egy-egy feladat teljes pontszáma nem csökken nulla alá.

2024.06.25.
Analízis 2. informatikusoknak vizsga, feleletválasztós rész (50 pont)

címke névvel, Neptun kóddal

$\boldsymbol{\alpha}$ ☐, $\boldsymbol{\beta}$ ■

Válassza ki az egyetlen helyes megoldást![1] **($4 \times 5 = 20$ pont)**

1. $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{\sin(x^2y^2)}{xy} \cdot \cos\left(\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\right) = ?$

☐ 0; ☐ 1; ☐ -1; ☐ nem létezik; ☐ más válasz.

2. Az $y''(x) + 2y'(x) + y(x) = \cos(x) + 2x$ differenciálegyenlet megoldásakor a próbafüggvényt $y(x) = \dots \quad (x \in \mathbb{R}, A, B, C, D \in \mathbb{R})$ alakban keressük.

☐ $Ae^{-x} + Bxe^{-x} + C$; ☐ $A\cos(x) + Bx$; ☐ $A\cos(x) + Bx + C$;
☐ $A\sin(x) + B\cos(x) + Cx + D$; ☐ $A\sin(x) + B\cos(x) + Cx^2 + Dx$; ☐ más válasz.

3. Legyen $f(x,y) := 2x^2 + y^3 - 3x + 4 \quad \big((x,y) \in \mathbb{R}^2\big)$. Az f függvény $(1,1)$ pontbeli iránymenti deriváltja a $\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ vektor irányában:

☐ 0; ☐ $-\frac{1}{\sqrt{2}}$; ☐ $\frac{3}{\sqrt{2}}$; ☐ $\sqrt{2}$; ☐ más válasz.

4. $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{x^{n+1}}{(2n)!} = \dots \quad (x \geq 0)$

☐ $x\,\mathrm{ch}(\sqrt{x})$; ☐ $x\,\mathrm{ch}\left(\frac{x}{2}\right)$; ☐ $xe^{\frac{x}{2}}$; ☐ $\mathrm{sh}\left(\frac{x}{2}\right)$; ☐ más válasz.

Minden állításról döntse el, hogy igaz (I) vagy hamis (H)![2] **($10 \times 3 = 30$ pont)**

5. A $2y'(x) - x^3 4y(x) = \sin(x) \quad (x \in \mathbb{R})$ differenciálegyenlet

lineáris; ☐ I; ☐ H;
állandó együtthatós; ☐ I; ☐ H;
tetszőleges kezdeti feltétel mellett létezik és egyértelmű a megoldása. ☐ I; ☐ H;

6. $f(x) = \sqrt[3]{1 + 2x^4}$

A függvény 0 középontú, tizedfokú Taylor-polinomja 4 tagot tartalmaz. ☐ I; ☐ H;
A függvény 0 középpontú Taylor-sora mindenütt előállítja f-et. ☐ I; ☐ H;
A 0 középpontú Taylor-sorban az x^4 együtthatója $\dfrac{2}{3}$. ☐ I; ☐ H;

7. Legyen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tetszőleges valós számsorozat.

Ha a $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} a_n$ numerikus sor konvergens, akkor minden $n \in \mathbb{N}^+$ esetén $a_n > \dfrac{1}{n}$. ☐ I; ☐ H;
Ha a $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} a_n$ numerikus sor konvergens, akkor minden átrenedézese is konvergens. ☐ I; ☐ H;
Ha minden $n \in \mathbb{N}^+$ esetén $0 \leq a_n \leq \dfrac{n!}{n^n}$, akkor a $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} a_n$ numerikus sor abszolút konvergens. ☐ I; ☐ H;
Ha $\limsup\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} < 1$, akkor $a_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$. ☐ I; ☐ H;

[1] A helyes megoldás előtti négyzetet **satírozza be**! Helyes válasz: 5 pont; helytelen vagy nem egyértelmű válasz: 0 pont.
[2] A helyes válasz előtti négyzetet **satírozza be**! Helyes válasz: 3 pont; nem egyértelmű válasz: 0 pont; helytelen válasz: -3 pont, azonban egy-egy feladat teljes pontszáma nem csökken nulla alá.

*** 1. feladat (12+12=24 pont)**
Számítsuk ki az $\int\limits_H f$ integrál értékét, ahol

a)
$$f(x,y) := 2xy \qquad \big((x,y)\in\mathbb{R}^2\big)\,,$$

H pedig az $y = x$ és $y = x^2$ egyenletű alakzatok által határolt korlátos tartomány;

b)
$$f(x,y.z) := \sqrt{x^2+y^2} \qquad \big((x,y,z)\in\mathbb{R}^2\big)\,,$$
$$H := \{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2\le 4,\ 0\le z\le x^2+y^2\}.$$

Mo. *a*)
$$H = \left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid 0\le x\le 1,\ x^2\le y\le x\right\}, \quad \textbf{(2p)}.$$

H normáltartomány, f folytonos H-n **(1p)**, tehát:

$$\int\limits_H f \overset{\textbf{(2p)}}{=} \int_0^1\int_{x^2}^{x} 2xy\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x \overset{\textbf{(2p)}}{=} \int_0^1 \left[xy^2\right]_{y=x^2}^{x}\,\mathrm{d}x \overset{\textbf{(2p)}}{=} \int_0^1 x^3 - x^5\,\mathrm{d}x \overset{\textbf{(2p)}}{=} \left[\frac{x^4}{4}-\frac{x^6}{6}\right]_{x=0}^{1} \overset{\textbf{(1p)}}{=} \frac{1}{12}.$$

b) Hengerkoordinátákkal

$$\int\limits_H f \overset{\textbf{(4p)}}{=} \int_0^2\int_0^{2\pi}\int_0^{r^2} f(r\cos(\varphi), r\sin(\varphi), z)\cdot r\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}r \overset{\textbf{(2p)}}{=} \int_0^2\int_0^{2\pi}\int_0^{r^2} r^2\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}r \overset{\textbf{(2p)}}{=}$$
$$= 2\pi\int_0^2 r^4\,\mathrm{d}r \overset{\textbf{(2p)}}{=} 2\pi\left[\frac{r^5}{5}\right]_{r=0}^{2} \overset{\textbf{(2p)}}{=} \frac{64\pi}{5}.$$

(Normáltartományos próbálkozásért maximum 2 pont adható.)

*** 2. feladat (10 pont)**
Legyen $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ abszolút integrálható függvény. Fejezzük ki az

$$\mathscr{F}\big(x\mapsto f(2x+3)\big)$$

Fourier-transzformáltat az f függvény Fourier-transzformáltjának segítségével.

Mo. Minden $\omega\in\mathbb{R}$ esetén

$$\mathscr{F}(x\mapsto f(x+3))(\omega) = e^{3\mathbf{i}\omega}\mathscr{F}(f)(\omega) \qquad \textbf{(5p)}$$
$$\mathscr{F}(x\mapsto f(2x+3))(\omega) = \frac{1}{2}e^{3\mathbf{i}\frac{\omega}{2}}\mathscr{F}(f)\left(\frac{\omega}{2}\right) \qquad \textbf{(5p)}$$

Alternatív megoldás a Fourier-transzformált definíciójával, majd a $t = 2x+3$, $(x = \frac{t}{2} - \frac{3}{2}$, $\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\mathrm{d}t)$ helyettesítéssel:

$$\begin{aligned}
\mathscr{F}\big(x \mapsto f(2x+3)\big) &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\mathbf{i}\omega x} f(2x+3)\,\mathrm{d}x = && (\mathbf{2p})\\
&= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\mathbf{i}\omega\left(\frac{t}{2}-\frac{3}{2}\right)} f(t)\,\frac{\mathrm{d}t}{2} = && (\mathbf{5p})\\
&= \frac{1}{2} e^{\frac{3}{2}\mathbf{i}\omega} \mathscr{F}(f)\left(\frac{\omega}{2}\right). && (\mathbf{3p})
\end{aligned}$$

3. feladat (6+10=16 pont)
a) Pontosan milyen $\alpha \in \mathbb{R}$ esetén konvergens a $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}^+} \frac{1}{n^\alpha}$ sor?
b) Bizonyítsuk az *a*) pontban megfogalmazott állítást $\alpha \neq 1$ esetén. (Az előadáson tanult tételt felhasználhatunk a bizonyításban.)

Mo. *a*) A $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}^+} \dfrac{1}{n^\alpha}$ numerikus sor pontosan akkor konvergens, ha $\alpha > 1$. **(6p)**

b) Ha $\alpha \leq 0$, akkor az $\left(\frac{1}{n^\alpha}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ sorozat nem tart 0-hoz, tehát $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}^+} \frac{1}{n^\alpha}$ divergens. **(2p)**

Ha $0 < \alpha \neq 1$, akkor

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha}\,\mathrm{d}x \overset{(\mathbf{1p})}{=} \lim_{b\to+\infty} \int_1^b \frac{1}{x^\alpha}\,\mathrm{d}x \overset{(\mathbf{1p})}{=} \lim_{b\to+\infty} \left[\frac{x^{1-\alpha}}{1-\alpha}\right]_{x=1}^b \overset{(\mathbf{1p})}{=}$$

$$= \lim_{b\to+\infty} \frac{b^{1-\alpha}}{1-\alpha} - \frac{1}{1-\alpha} \overset{(\mathbf{2p})}{=} \begin{cases} +\infty & \text{, ha } 0 < \alpha < 1 \\ \frac{1}{\alpha-1} & \text{, ha } \alpha > 1, \end{cases}$$

tehát az integrálkritérium alapján **(2p)** $\alpha > 1$ esetén $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}^+} \frac{1}{n^\alpha}$ konvergens, $0 < \alpha < 1$ esetén pedig divergens **(1p)** .

---

4. feladat (plusz 10 pontért)
Adjunk példát olyan $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ függvénysorozatra, amely pontonként konvergens a $[0,1]$ intervallumon, minden $n \in \mathbb{N}$ esetén f_n Riemann-integrálható a $[0,1]$ intervallumon, $f := \lim\limits_{n\to\infty} f_n$ Riemann-integrálható $[0,1]$-en, továbbá az $\left(\int_0^1 f_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ számsorozat konvergens és $\int_0^1 f_n \overset{n\to\infty}{\not\to} \int_0^1 f$

Mo. Egy lehetséges példa: minden $n \in \mathbb{N}$ és $x \in \mathbb{R}$ esetén legyen

$$f_n(x) := \begin{cases} n^2 x & \text{, ha } 0 \leq x < \frac{1}{n} \\ 2n - n^2 x & \text{, ha } \frac{1}{n} \leq x \leq \frac{2}{n} \\ 0 & \text{, ha } x \in \mathbb{R} \setminus [0, \frac{2}{n}] \end{cases} \qquad (\mathbf{6p})$$

Ekkor $\lim\limits_{n\to\infty} f_n \equiv 0$ **(2p)** , továbbá minden $n \in \mathbb{N}$ esetén $\int_0^1 f_n = 1$ **(2p)** .

2024.06.25.
Analízis 2. informatikusoknak vizsga, feleletválasztós rész (50 pont)

címke névvel, Neptun kóddal

$\boldsymbol{\alpha}$ ■, $\boldsymbol{\beta}$ □

Válassza ki az egyetlen helyes megoldást![1] **($4 \times 5 = 20$ pont)**

1. $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{\sin(xy^2)}{xy} \cdot \operatorname{arctg}\left(\dfrac{1}{x^2+y^2}\right) = ?$

■ 0; □ 1; □ -1; □ nem létezik; □ más válasz.

2. Az $y'''(x) - 2y''(x) + y'(x) = \sin(x) + 3$ differenciálegyenlet megoldásakor a próbafüggvényt $y(x) = \dots \quad (x \in \mathbb{R}, A, B, C \in \mathbb{R})$ alakban keressük.

□ $Ae^x + Bxe^x + C$; □ $A\sin(x) + B$; □ $A\sin(x) + Bx + C$;
■ $A\sin(x) + B\cos(x) + Cx$; □ $A\sin(x) + Bx^2 + Cx$; □ más válasz.

3. Legyen $f(x,y) := x^2 + y^3 - 2x - 3 \quad \big((x,y) \in \mathbb{R}^2\big)$. Az f függvény $(1,1)$ pontbeli iránymenti deriváltja az $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ vektor irányában:

□ 0; □ $\frac{1}{\sqrt{2}}$; ■ $-\frac{3}{\sqrt{2}}$; □ $-\sqrt{2}$; □ más válasz.

4. $\sum\limits_{n=0}^{\infty} (-1)^n \dfrac{x^{n+1}}{(2n)!} = \dots \quad (x \geq 0)$

□ $x\cos\left(\frac{x}{2}\right)$; ■ $x\cos(\sqrt{x})$; □ $\sin\left(\frac{x}{2}\right)$; □ $xe^{-\frac{x}{2}}$; □ más válasz.

Minden állításról döntse el, hogy igaz (I) vagy hamis (H)![2] **($10 \times 3 = 30$ pont)**

5. A $2y'(x) - x^2 4y(x) = \cos(x) \quad (x \in \mathbb{R})$ differenciálegyenlet

homogén; □ I; ■ H;
lineáris; ■ I; □ H;
tetszőleges kezdeti feltétel mellett létezik és egyértelmű a megoldása. ■ I; □ H;

6. $f(x) = \sqrt[4]{1 + 2x^3}$

A függvény 0 központú, nyolcadfokú Taylor-polinomja 3 tagot tartalmaz. ■ I; □ H;
A függvény 0 középpontú Taylor-sora mindenütt előállítja f-et. □ I; ■ H;
A 0 középpontú Taylor-sorban az x^3 együtthatója $\dfrac{3}{8}$. □ I; ■ H;

7. Legyen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tetszőleges valós számsorozat.

Ha a $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} a_n$ numerikus sor minden átrendezése konvergens, akkor abszolút konvergens. ■ I; □ H;
Ha a $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} a_n$ numerikus sor konvergens, akkor minden $n \in \mathbb{N}^+$ esetén $a_n > \dfrac{1}{n}$. □ I; ■ H;
Ha $\limsup\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} \leq 1$, akkor $a_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$. □ I; ■ H;
Ha minden $n \in \mathbb{N}^+$ esetén $0 \leq a_n \leq \dfrac{n!}{n^n}$, akkor a $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} a_n$ numerikus sor abszolút konvergens. ■ I; □ H;

[1] A helyes megoldás előtti négyzetet **satírozza be**! Helyes válasz: 5 pont; helytelen vagy nem egyértelmű válasz: 0 pont.
[2] A helyes válasz előtti négyzetet **satírozza be**! Helyes válasz: 3 pont; nem egyértelmű válasz: 0 pont; helytelen válasz: -3 pont, azonban egy-egy feladat teljes pontszáma nem csökken nulla alá.

2024.06.25.
Analízis 2. informatikusoknak vizsga, feleletválasztós rész (50 pont)

címke névvel, Neptun kóddal

$\boldsymbol{\alpha}$ □, $\boldsymbol{\beta}$ ■

Válassza ki az egyetlen helyes megoldást![1] **($4 \times 5 = 20$ pont)**

1. $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{\sin(x^2y^2)}{xy} \cdot \cos\left(\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\right) = ?$

■ 0; □ 1; □ -1; □ nem létezik; □ más válasz.

2. Az $y''(x) + 2y'(x) + y(x) = \cos(x) + 2x$ differenciálegyenlet megoldásakor a próbafüggvényt $y(x) = \ldots \quad (x \in \mathbb{R}, A, B, C, D \in \mathbb{R})$ alakban keressük.

□ $Ae^{-x} + Bxe^{-x} + C$; □ $A\cos(x) + Bx$; □ $A\cos(x) + Bx + C$;
■ $A\sin(x) + B\cos(x) + Cx + D$; □ $A\sin(x) + B\cos(x) + Cx^2 + Dx$; □ más válasz.

3. Legyen $f(x,y) := 2x^2 + y^3 - 3x + 4 \quad \big((x,y) \in \mathbb{R}^2\big)$. Az f függvény $(1,1)$ pontbeli iránymenti deriváltja a $\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ vektor irányában:

□ 0; □ $-\frac{1}{\sqrt{2}}$; □ $\frac{3}{\sqrt{2}}$; ■ $\sqrt{2}$; □ más válasz.

4. $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{x^{n+1}}{(2n)!} = \ldots \quad (x \geq 0)$

■ $x\,\mathrm{ch}(\sqrt{x})$; □ $x\,\mathrm{ch}\left(\frac{x}{2}\right)$; □ $xe^{\frac{x}{2}}$; □ $\mathrm{sh}\left(\frac{x}{2}\right)$; □ más válasz.

Minden állításról döntse el, hogy igaz (I) vagy hamis (H)![2] **($10 \times 3 = 30$ pont)**

5. A $2y'(x) - x^3 4y(x) = \sin(x) \quad (x \in \mathbb{R})$ differenciálegyenlet

lineáris; ■ I; □ H;
állandó együtthatós; □ I; ■ H;
tetszőleges kezdeti feltétel mellett létezik és egyértelmű a megoldása. ■ I; □ H;

6. $f(x) = \sqrt[3]{1 + 2x^4}$

A függvény 0 középontú, tizedfokú Taylor-polinomja 4 tagot tartalmaz. □ I; ■ H;
A függvény 0 középpontú Taylor-sora mindenütt előállítja f-et. □ I; ■ H;
A 0 középpontú Taylor-sorban az x^4 együtthatója $\dfrac{2}{3}$. ■ I; □ H;

7. Legyen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tetszőleges valós számsorozat.

Ha a $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} a_n$ numerikus sor konvergens, akkor minden $n \in \mathbb{N}^+$ esetén $a_n > \dfrac{1}{n}$. □ I; ■ H;
Ha a $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} a_n$ numerikus sor konvergens, akkor minden átrenedézese is konvergens. □ I; ■ H;
Ha minden $n \in \mathbb{N}^+$ esetén $0 \leq a_n \leq \dfrac{n!}{n^n}$, akkor a $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} a_n$ numerikus sor abszolút konvergens. ■ I; □ H;
Ha $\limsup\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} < 1$, akkor $a_n \xrightarrow{n\to\infty} 0$. ■ I; □ H;

---

[1] A helyes megoldás előtti négyzetet **satírozza be**! Helyes válasz: 5 pont; helytelen vagy nem egyértelmű válasz: 0 pont.
[2] A helyes válasz előtti négyzetet **satírozza be**! Helyes válasz: 3 pont; nem egyértelmű válasz: 0 pont; helytelen válasz: -3 pont, azonban egy-egy feladat teljes pontszáma nem csökken nulla alá.