ANALÍZIS 2.	**I. zárthelyi**	**2022. március 31.**
Mérnökinformatikus szak	α-variáns	Munkaidő: 90 perc

1. feladat (18 pont)
Oldjuk meg az alábbi differenciálegyenletet. (A megoldást elég implicit alakban megadni.)

$$y' = \frac{y\ln(y)}{x^2 - 4x - 5}$$

2. feladat (20 pont)
Oldjuk meg az alábbi kezdetiérték-problémát.

$$y' - \frac{3y}{x-1} = e^x(x-1)^4 \quad (x \neq 1), \qquad y(2) = 1$$

3. feladat (22 pont)
Adjuk meg az alábbi differenciálegyenlet általános megoldását.

$$y''' + 3y'' + 2y' = 12e^{3x} + 4x$$

4. feladat (8+8+8=24 pont)
Konvergensek-e az alábbi sorok?

$$a)\ \sum_{n\in\mathbb{N}^+} \frac{(-1)^n}{n^2\ln(n+1)} \qquad b)\ \sum_{n\in\mathbb{N}} \left(\frac{n^2+2}{n^2+3}\right)^{n^3} \qquad c)\ \sum_{n\in\mathbb{N}} \left(\frac{n^2+3}{n^2+2}\right)^{n^3} \cdot \frac{n^n}{n!}$$

5. feladat (6+10=16 pont)
a) Mikor nevezünk egy numerikus sort abszolút konvergensnek? Mi a kapcsolat egy sor konvergenciája és abszolút konvergenciája között?
b) Konvergens-e a

$$\sum_{n\in\mathbb{N}^+} (-1)^n \frac{(n+1)!}{(n+3)n^n}$$

numerikus sor?

IMSc feladat (15 IMSc pont) Adjunk példát olyan pozitív tagú konvergens sorra, amelynek konvergenciáját a hányadoskritériummal nem tudjuk eldönteni, a gyökkritériummal viszont igen. Indokoljunk!
(*Segítség*: keressünk olyan $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n$ numerikus sort, amelyre teljesülnek a $\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} < 1$, $\liminf_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} < 1$ és $\limsup_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} > 1$ egyenlőtlenségek.)

1. feladat (18 pont)
Oldjuk meg az alábbi differenciálegyenletet. (A megoldást elég implicit alakban megadni.)

$$y' = \frac{y\ln(y)}{x^2-4x-5}$$

Mo. Szeperálható differenciálegynlet, $y \equiv 1$ megoldás **(2p)** . A tanult módszerrel:

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{y\ln(y)}{x^2-4x-5} \quad\Longrightarrow\quad \int \frac{1}{y\ln(y)}\,\mathrm{d}y = \int \frac{1}{x^2-4x-5}\,\mathrm{d}x \quad (\mathbf{2p})$$

Az egyenlőség bal oldala:

$$\int \frac{1}{y\ln(y)}\,\mathrm{d}y = \ln|\ln(y)| + C_1 \quad (C_1 \in \mathbb{R}) \quad (\mathbf{6p})$$

Az egyenlőség jobb oldala:

$$\int \frac{1}{x^2-4x-5}\,\mathrm{d}x = \int \frac{1}{(x-5)(x+1)}\,\mathrm{d}x \quad (\mathbf{2p})$$

Parciális törtekre bontással:

$$\frac{1}{(x-5)(x+1)} = \frac{A}{x-5} + \frac{B}{x+1} = \frac{A(x+1)+B(x-5)}{(x-5)(x+1)}$$

Ebből pedig $A = \frac{1}{6}$, $B = -\frac{1}{6}$ adódik **(2p)** .

$$\int \frac{1}{(x-5)(x+1)}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{6}\int \frac{1}{x-5}\,\mathrm{d}x - \frac{1}{6}\int \frac{1}{x+1}\,\mathrm{d}x =$$
$$= \frac{1}{6}\ln\left|\frac{x-5}{x+1}\right| + C_2 \quad (C_2 \in \mathbb{R}) \quad (\mathbf{2p})$$

Tehát a megoldások:

$$y \equiv 1 \quad \text{és} \quad \ln|\ln(y(x))| = \frac{1}{6}\ln\left|\frac{x-5}{x+1}\right| + C \quad (C \in \mathbb{R}) \quad (\mathbf{2p})$$

---

2. feladat (20 pont)
Oldjuk meg az alábbi kezdetiérték-problémát.

$$y' - \frac{3y}{x-1} = e^x(x-1)^4 \quad (x \neq 1), \qquad y(2) = 1$$

Mo. Inhomogén lineáris egyenlet, a hozzá tartozó homogén egyenlet:

$$y' - \frac{3y}{x-1} = 0 \quad \Longrightarrow \quad y_{h,á}(x) = C(x-1)^3 \quad (C \in \mathbb{R},\, x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}) \quad \textbf{(6p)}$$

(Megoldva szeparálhatóként, vagy a megoldás általános alakjának ismeretéből.)
Az inhomogén egyenlet megoldása: keressük a megoldást $y(x) = c(x)(x-1)^3$ alakban (ahol c egy $\mathbb{R} \rightarrowtail \mathbb{R}$ differenciálható függvény) **(1p)** .
Behelyettestve a differenciálegyenletbe:

$$\underbrace{c'(x)(x-1)^3 + 3c(x)(x-1)^2}_{y'(x)} - \underbrace{3c(x)(x-1)^2}_{\frac{3y(x)}{x-1}} = e^x(x-1)^4 \quad \textbf{(2p)}$$

Ebből pedig $c'(x) = e^x(x-1)$. Parciális integrálással

$$\int e^x(x-1)\,\mathrm{d}x = e^x(x-1) - \int e^x\,\mathrm{d}x = e^x(x-2) + D \quad (D \in \mathbb{R}) \quad \textbf{(4p)},$$

tehát a $D = 0$ választásssal $c(x) := e^x(x-2)$, így az inhomogén egyenlet egy partikuáris megoldása:

$$y_{i,p}(x) = c(x)(x-1)^3 = e^x(x-2)(x-1)^3 \quad \textbf{(1p)}$$

Amiből az általános megoldás:

$$y_{i,á}(x) \stackrel{\textbf{(2p)}}{=} y_{i,p}(x) + y_{h,á}(x) \stackrel{\textbf{(1p)}}{=} e^x(x-2)(x-1)^3 + C(x-1)^3 \quad (C \in \mathbb{R},\, x \in \mathbb{R} \setminus \{1\})$$

Jelölje $\widetilde{y}$ a kezdeti feltételt kielégítő megoldást. $\tilde{y}(2) = 1 \quad \Longrightarrow \quad C = 1$ **(1p)** , azaz

$$\tilde{y}(x) = e^x(x-2)(x-1)^3 + (x-1)^3 \quad (C \in \mathbb{R},\, x > 1) \quad \textbf{(2p)}$$

---

3. feladat (22 pont)
Adjuk meg az alábbi differenciálegyenlet általános megoldását.

$$y''' + 3y'' + 2y' = 12e^{3x} + 4x$$

Mo. Harmadrendű, lineáris állandó együtthatós, inhomogén egyenlet. A homogén egyenlethez tartozó karakterisztikus egyenlet:

$$\lambda^3 + 3\lambda^2 + 2\lambda = 0 \quad \textbf{(2p)},$$

gyökei: $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = -1$, $\lambda_2 = -2$ **(2p)** . Ebből a homogén egyenlet általános megoldása:

$$y_{h,á}(x) = C_1 + C_2e^{-x} + C_3e^{-2x} \quad (x \in \mathbb{R},\ C_1, C_2, C_3 \in \mathbb{R}) \quad \mathbf{(4p)}$$

Az inhomogén egyenlet egy partikuláris megoldását keressük az $y(x) = Ae^{3x}+Bx+C$ alak (rezonancia) **(2p)** helyett $y(x) = Ae^{3x} + Bx^2 + Cx$ alakban **(2p)** ($x \in \mathbb{R}$, $A, B, C \in \mathbb{R}$). Deriválva háromszor **(3p)** :

$$\begin{aligned} y(x) &= Ae^{3x} + Bx^2 + Cx && | \cdot 0 \\ y'(x) &= 3Ae^{3x} + 2Bx + C && | \cdot 2 \\ y''(x) &= 9Ae^{3x} + 2B && | \cdot 3 \\ y'''(x) &= 27Ae^{3x} && | \cdot 1 \end{aligned}$$

Behelyettesítve a differenciálegyenletbe:

$$60Ae^{3x}+4Bx+2C+6B = 12e^{3x}+4x \quad \mathbf{(2p)} \quad \Longrightarrow \quad A = \frac{1}{5},\ B = 1,\ C = -3 \quad \mathbf{(2p)},$$

tehát az inhomogén egyenlet egy partikuláris megoldása:

$$y_{i,p}(x) = \frac{1}{5}e^{3x} + x^2 - 3x \quad (x \in \mathbb{R}) \quad \mathbf{(1p)}$$

A differenciálegynlet általános megoldása:

$$\begin{aligned} y_{i,á}(x) &= y_{i,p}(x) + y_{h,á}(x) = \\ &= \frac{1}{5}e^{3x} + x^2 - 3x + C_1 + C_2e^{-x} + C_3e^{-2x} \quad (x \in \mathbb{R},\ C_1, C_2, C_3 \in \mathbb{R}) \quad \mathbf{(2p)} \end{aligned}$$

---

4. feladat (8+8+8=24 pont)
Konvergensek-e az alábbi sorok?

$$a) \sum_{n\in\mathbb{N}^+} \frac{(-1)^n}{n^2 \ln(n+1)} \qquad b) \sum_{n\in\mathbb{N}} \left(\frac{n^2+2}{n^2+3}\right)^{n^3} \qquad c) \sum_{n\in\mathbb{N}} \left(\frac{n^2+3}{n^2+2}\right)^{n^3} \cdot \frac{n^n}{n!}$$

Mo. *a)* Legyen $a_n := \dfrac{(-1)^n}{n^2 \ln(n+1)} \quad (n \in \mathbb{N}^+)$.

Első megoldás.

$$|a_n| \le \frac{1}{n^2} \quad (\text{ha } n \ge 2) \quad \mathbf{(4p)},$$

és a $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}^+} \frac{1}{n^2}$ numerikus sor konvergens **(1p)** , tehát a majoráns kritérium alapján $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}^+} a_n$ abszolút konvergens **(2p)** , következésképpen konvergens **(1p)** .

Második megoldás. A $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}^+} a_n$ sor alternál **(1p)** , az $\left(\frac{1}{n^2\ln(n+1)}\right)_{n\in\mathbb{N}^+}$ sorozat monoton csökkenő **(3p)** (hiszen egy nemnegatív monoton növő sorozat reciproka), és 0-hoz tart **(2p)** , tehát a Leibniz-kritérium alapján $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}^+} a_n$ konvergens **(2p)** .

b) Legyen $b_n := \left(\dfrac{n^2+2}{n^2+3}\right)^{n^3} \quad (n \in \mathbb{N}).$

$$\sqrt[n]{b_n} \overset{(\mathbf{2p})}{=} \left(\frac{n^2+2}{n^2+3}\right)^{n^2} \overset{(\mathbf{2p})}{=} \frac{\left(1+\frac{2}{n^2}\right)^{n^2}}{\left(1+\frac{3}{n^2}\right)^{n^2}} \xrightarrow[(\mathbf{1p})]{n\to\infty} \frac{e^2}{e^3} = \frac{1}{e} < 1 \quad (\mathbf{1p})$$

tehát a gyökkritérium alapján $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} b_n$ konvergens **(2p)** .

c) Legyen $c_n := \left(\dfrac{n^2+3}{n^2+2}\right)^{n^3} \cdot \dfrac{n^n}{n!} \quad (n \in \mathbb{N}).$

Első megoldás. Minden $n \in \mathbb{N}$ esetén

$$c_n \geq \frac{n^n}{n!} \quad (\mathbf{3p})$$

és $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n^n}{n!} = +\infty$ **(2p)** , tehát (a speciális rendőrelv alapján) $\lim\limits_{n\to\infty} c_n = +\infty$ **(1p)** , ezért a $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} c_n$ sor divergens **(2p)** .

Második megoldás. Minden $n \in \mathbb{N}$ esetén

$$c_n \geq \frac{n^n}{n!} \geq 1 \quad (\mathbf{4p}),$$

tehát a $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sorozat nem tart 0-hoz **(2p)** , ezért a $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} c_n$ sor divergens **(2p)** .

---

5. feladat (6+10=16 pont)

a) Mikor nevezünk egy numerikus sort abszolút konvergensnek? Mi a kapcsolat egy sor konvergenciája és abszolút konvergenciája között?

b) Konvergens-e a

$$\sum_{n\in\mathbb{N}^+} (-1)^n \frac{(n+1)!}{(n+3)n^n}$$

numerikus sor?

Mo. *a*) A $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} a_n$ numerikus sor abszolút konvergens, ha a $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} |a_n|$ sor konvergens. **(3p)**
Minden abszolút konvergens sor konvergens. **(3p)**

b) *Első megoldás.* Legyen $a_n := (-1)^n \frac{(n+1)!}{(n+3)n^n}$ $(n \in \mathbb{N})$. Vizsgáljuk a $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} a_n$ sor abszolút konvergenciáját **(3p)** :

$$\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \frac{(n+2)!}{(n+4)(n+1)^{n+1}} \cdot \frac{(n+3)n^n}{(n+1)!} \overset{\textbf{(2p)}}{=} \frac{(n+2)(n+3)}{(n+4)(n+1)} \cdot \left(\frac{n}{n+1}\right)^n \underset{\textbf{(2p)}}{\overset{n\to\infty}{\longrightarrow}} \frac{1}{e} < 1,$$

tehát a hányadoskritérium alapján a $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} a_n$ sor abszolút konvergens **(1p)** , következésképpen konvergens **(2p)** .

Második megoldás. Legyen $a_n := (-1)^n \frac{(n+1)!}{(n+3)n^n}$ $(n \in \mathbb{N})$. A $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} a_n$ sor alternál **(1p)** ,

$$|a_n| = \frac{(n+1)!}{(n+3)n^n} \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0 \quad \textbf{(2p)},$$

$$\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \frac{(n+2)!}{(n+4)(n+1)^{n+1}} \cdot \frac{(n+3)n^n}{(n+1)!} \overset{\textbf{(2p)}}{=} \frac{(n+2)(n+3)}{(n+4)(n+1)} \cdot \left(\frac{n}{n+1}\right)^n \underset{\textbf{(2p)}}{\overset{n\to\infty}{\longrightarrow}} \frac{1}{e} < 1,$$

azaz $(|a_n|)_{n\in\mathbb{N}}$ egy küszöbindextől kezdve monoton csökkenő **(1p)** . Tehát a Leibniz-kritérium alapján $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} a_n$ konvergens **(2p)** .

IMSc feladat (15 IMSc pont) Adjunk példát olyan pozitív tagú konvergens sorra, amelynek konvergenciáját a hányadoskritériummal nem tudjuk eldönteni, a gyökkritériummal viszont igen. Indokoljunk!
(*Segítség*: keressünk olyan $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} a_n$ numerikus sort, amelyre teljesülnek a $\limsup\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} < 1$, $\liminf\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} < 1$ és $\limsup\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} > 1$ egyenlőtlenségek.)

Mo. Legyen például

$$a_n := \begin{cases} \dfrac{1}{2^n} & \text{, ha } n \in \mathbb{N} \text{ és } n \text{ páros,} \\[2ex] \dfrac{1}{3^n} & \text{, ha } n \in \mathbb{N} \text{ és } n \text{ páratlan.} \end{cases} \qquad \textbf{(5p)}$$

Ekkor az $\left(\sqrt[n]{a_n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ sorozat torlódási pontjai: $\frac{1}{2}$ és $\frac{1}{3}$ **(2p)** , tehát

$$\limsup_{n\to\infty} a_n = \frac{1}{2} < 1 \quad \textbf{(1p)}$$

tehát a gyökkritérium alapján a $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} a_n$ sor konvergens **(2p)** . Ugyanakkor

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} := \begin{cases} \frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^n & \text{, ha } n \in \mathbb{N} \text{ és } n \text{ páros,} \\ \frac{1}{2}\left(\frac{3}{2}\right)^n & \text{, ha } n \in \mathbb{N} \text{ és } n \text{ páratlan.} \end{cases} \qquad (\mathbf{3p}),$$

tehát $\limsup\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = +\infty$ és $\liminf\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = 0$ **(2p)** , tehát a hányadoskritérium nem alkalmazható a $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} a_n$ sorra.

ANALÍZIS 2.	**I. pót-/javító zárthelyi**	**2022. április 21.**
Mérnökinformatikus szak	α-variáns	Munkaidő: 90 perc

1. feladat (12+8 pont)
a) Oldjuk meg az alábbi differenciálegyenletet! (A megoldást elég implicit alakban megadni.)

$$y' = \frac{e^{-2y^2}\,\mathrm{ch}(2x)}{y}$$

b) Rajzoljuk fel az

$$y' = y^2 + 1 + x^2 + 2x$$

differenciálegyenlet $K_1 = 1$-hez és $K_2 = 4$-hez tartozó izoklináját, és jelöljünk be rajtuk egy-egy vonalelemet!

2. feladat (20 pont)
Az $u := y^3$ helyettesítéssel oldjuk meg az alábbi differenciálegyenletet! (Explicit alakban adjuk meg az általános megoldást!)

$$3y^2y' - 2xy^3 = e^{x^2}\ln(x) \quad (x > 0)$$

3. feladat (20 pont)
Adjuk meg az alábbi differenciálegyenlet általános megoldását!

$$y'' - 4y' + 5y = 13\sin(2x)$$

4. feladat (7+7+7=21 pont)
Konvergensek-e az alábbi sorok?

$$a)\ \sum_{n\in\mathbb{N}^+} \frac{\sin^n(2n^2)}{n^3} \qquad b)\ \sum_{n\in\mathbb{N}} \left(\frac{n+2}{n+3}\right)^n \qquad c)\ \sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{n^2+3+7^n}{2+2^{2n}}$$

5. feladat (5+14=19 pont)
a) Mit mond ki az integrálkritérium?
b) Konvergens-e a

$$\sum_{n\in\mathbb{N},\, n\geq 2} \frac{1}{2n\ln^2(n)}$$

numerikus sor? Amennyiben igen, adjunk nemtriviális felső becslést az elkövetett hibára, ha a sor összegét az $S_{99} = \sum_{n=2}^{99} \frac{1}{2n\ln^2(n)}$ részletösszeggel közelítjük.

IMSc feladat (15 IMSc pont) Határozzuk meg a

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2n^2+6n+4}$$

összeget.
(Ha az összeg meghatározása nem sikerül, akkor legfeljebb **5 IMSc pontért** adjunk olyan $K_1 \in \mathbb{R}$ alsó és $K_2 \in \mathbb{R}$ felső becslést az összegre, amelyekre $K_2 - K_1 \leq 0{,}2$.)

1. feladat (12+8 pont)
a) Oldjuk meg az alábbi differenciálegyenletet! (A megoldást elég implicit alakban megadni.)

$$y' = \frac{e^{-2y^2}\,\mathrm{ch}(2x)}{y}$$

b) Rajzoljuk fel az

$$y' = y^2 + 1 + x^2 + 2x$$

differenciálegyenlet $K_1 = 1$-hez és $K_2 = 4$-hez tartozó izoklináját, és jelöljünk be rajtuk egy-egy vonalelemet!

Mo. *a*) Szeparálható differenciálegyenlet, a tanult módszerrel:

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{e^{-2y^2}\,\mathrm{ch}(2x)}{y} \quad \Longrightarrow \quad \int y e^{2y^2}\,\mathrm{d}y = \int \mathrm{ch}(2x)\,\mathrm{d}x \quad (\mathbf{2p})$$

Az egyenlőség bal oldala:

$$\int y e^{2y^2}\,\mathrm{d}y = \frac{1}{4}e^{2y^2} + C_1 \quad (C_1 \in \mathbb{R}) \quad (\mathbf{4p})$$

Az egyenlőség jobb oldala:

$$\int \mathrm{ch}(2x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\,\mathrm{sh}(2x) + C_2 \quad (C_2 \in \mathbb{R}) \quad (\mathbf{4p})$$

Tehát a megoldás (implicit alakban):

$$\frac{1}{2}e^{2y^2(x)} = \mathrm{sh}(2x) + C \quad (C \in \mathbb{R}) \quad (\mathbf{2p})$$

b) A $K_1 = 1$-hez tartozó izoklina egyenlete

$$y^2 + (x+1)^2 = 1$$

ami egy $(-1, 0)$ középpontú 1 sugarú körvonal. **(3p)** A vonalelemek 1 meredekségűek. **(1p)**

A $K_1 = 4$-hez tartozó izoklina egyenlete

$$y^2 + (x+1)^2 = 4$$

ami egy $(-1, 0)$ középpontú 2 sugarú körvonal. **(3p)** A vonalelemek 4 meredekségűek. **(1p)**

2. feladat (20 pont)
Az $u := y^3$ helyettesítéssel oldjuk meg az alábbi differenciálegyenletet! (Explicit alakban adjuk meg az általános megoldást!)

$$3y^2y' - 2xy^3 = e^{x^2}\ln(x) \quad (x > 0)$$

Mo. A helyettesítés után az egyenlet:

$$u' - 2xu = e^{x^2}\ln(x) \quad \mathbf{(2p)}$$

Inhomogén lineáris egyenlet, a hozzá tartozó homogén egyenlet:

$$u' - 2xu = 0 \quad \Longrightarrow \quad u_{h,á}(x) = Ce^{x^2} \quad (C \in \mathbb{R},\, x \in \mathbb{R}) \quad \mathbf{(6p)}$$

(Megoldva szeparálhatóként, vagy a megoldás általános alakjának ismeretéből.)
Az inhomogén egyenlet megoldása: keressük a megoldást $u(x) = c(x)e^{x^2}$ alakban (ahol c egy $\mathbb{R} \rightarrowtail \mathbb{R}$ differenciálható függvény) **(1p)** .
Behelyettesítve a differenciálegyenletbe:

$$\underbrace{c'(x)e^{x^2} + 2xc(x)e^{x^2}}_{u'(x)} \underbrace{-2xc(x)e^{x^2}}_{-2xu(x)} = e^{x^2}\ln(x) \quad \mathbf{(2p)}$$

Ebből pedig $c'(x) = \ln(x)$. Parciális integrálással

$$\int \ln(x)\,\mathrm{d}x = x\ln(x) - \int 1\,\mathrm{d}x = x\ln(x) - x + D \quad (D \in \mathbb{R}) \quad \mathbf{(4p)},$$

tehát a $D = 0$ választással $c(x) := x\ln(x) - x$, így az inhomogén egyenlet egy partikuláris megoldása:

$$u_{i,p}(x) = c(x)e^{x^2} = xe^{x^2}(\ln(x) - 1) \quad \mathbf{(1p)}$$

Amiből az általános megoldás:

$$u_{i,á}(x) \overset{\mathbf{(1p)}}{=} u_{i,p}(x) + u_{h,á}(x) \overset{\mathbf{(1p)}}{=} xe^{x^2}(\ln(x) - 1) + Ce^{x^2} \quad (C \in \mathbb{R},\, x \in \mathbb{R}^+)$$

Visszahelyettesítve:

$$y(x) = \sqrt[3]{xe^{x^2}(\ln(x) - 1) + Ce^{x^2}} \quad (C \in \mathbb{R},\, x \in \mathbb{R}^+) \quad \mathbf{(2p)}$$

3. feladat (20 pont)
Adjuk meg az alábbi differenciálegyenlet általános megoldását!

$$y'' - 4y' + 5y = 13\sin(2x)$$

Mo. Harmadrendű, lineáris állandó együtthatós, inhomogén egyenlet. A homogén egyenlethez tartozó karakterisztikus egyenlet:

$$\lambda^2 - 4\lambda + 5 = 0 \quad (\mathbf{2p}),$$

gyökei: $\lambda_{1,2} = 2 \pm i$, **(2p)** . Ebből a homogén egyenlet általános megoldása:

$$y_{h,á}(x) = C_1 e^{2x}\sin(x) + C_2 e^{2x}\cos(x) \quad (x \in \mathbb{R},\ C_1, C_2 \in \mathbb{R}) \quad (\mathbf{4p})$$

Az inhomogén egyenlet egy partikuláris megoldását

$$y(x) = A\sin(2x) + B\cos(2x) \quad (x \in \mathbb{R}, A, B \in \mathbb{R}) \quad (\mathbf{2p})$$

alakban keressük (nincs rezonancia). Deriválva kétszer **(2p)** :

$$\begin{aligned} y(x) &= A\sin(2x) + B\cos(2x) && \mid \cdot 5 \\ y'(x) &= 2A\cos(2x) - 2B\sin(2x) && \mid \cdot (-4) \\ y''(x) &= -4A\sin(2x) - 4B\cos(2x) && \mid \cdot 1 \end{aligned}$$

Behelyettesítve a differenciálegyenletbe:

$$y''(x) - 4y'(x) + 5y(x) = (A + 8B)\sin(2x) + (-8A + B)\cos(2x) = 13\sin(2x) \quad (\mathbf{2p})$$

$$\Longrightarrow \quad A = \frac{1}{5},\ B = \frac{8}{5} \quad (\mathbf{3p}),$$

tehát az inhomogén egyenlet egy partikuláris megoldása:

$$y_{i,p}(x) = \frac{1}{5}\sin(2x) + \frac{8}{5}\cos(2x) \quad (x \in \mathbb{R}) \quad (\mathbf{1p})$$

A differenciálegyenlet általános megoldása:

$$\begin{aligned} y_{i,á}(x) &= y_{i,p}(x) + y_{h,á}(x) = \\ &= \frac{1}{5}\sin(2x) + \frac{8}{5}\cos(2x) + C_1 e^{2x}\sin(x) + C_2 e^{2x}\cos(x) \quad (x \in \mathbb{R},\ C_1, C_2 \in \mathbb{R}) \quad (\mathbf{2p}) \end{aligned}$$

4. feladat (7+7+7=21 pont)
Konvergensek-e az alábbi sorok?

$$a)\ \sum_{n\in\mathbb{N}^+} \frac{\sin^n(2n^2)}{n^3} \qquad b)\ \sum_{n\in\mathbb{N}} \left(\frac{n+2}{n+3}\right)^n \qquad c)\ \sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{n^2+3+7^n}{2+2^{2n}}$$

Mo. *a)* Legyen $a_n := \frac{\sin^n(2n^2)}{n^3} \quad (n \in \mathbb{N}^+)$.

$$|a_n| \le \frac{1}{n^3} \quad (n \in \mathbb{N}^+) \quad (\mathbf{4p}),$$

és a $\sum_{n\in\mathbb{N}^+} \frac{1}{n^3}$ numerikus sor konvergens **(1p)** , tehát a majoráns kritérium alapján $\sum_{n\in\mathbb{N}^+} a_n$ abszolút konvergens **(1p)** , következésképpen konvergens **(1p)** .

b) Legyen $b_n := \left(\frac{n+2}{n+3}\right)^n \quad (n \in \mathbb{N})$.

$$b_n \overset{(\mathbf{2p})}{=} \frac{\left(1+\frac{2}{n}\right)^n}{\left(1+\frac{3}{n}\right)^n} \underset{(\mathbf{2p})}{\xrightarrow{n\to\infty}} \frac{e^2}{e^3} = \frac{1}{e} \ne 0 \quad (\mathbf{1p})$$

tehát nem teljesül a sorok konvergenciájának szükséges feltétele, ezért $\sum_{n\in\mathbb{N}} b_n$ divergens **(2p)** .

c) Legyen $c_n := \frac{n^2+3+7^n}{2+2^{2n}} \quad (n \in \mathbb{N})$.
Első megoldás. Minden $n \in \mathbb{N}$ esetén

$$c_n \ge \frac{7^n}{2\cdot 4^n} \ge 0 \quad (\mathbf{4p})$$

és a $\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{1}{2}\left(\frac{7}{4}\right)^n$ sor divergens **(1p)** , tehát a minoráns kritérium alapján $\sum_{n\in\mathbb{N}} c_n$ divergens **(2p)** .
Második megoldás.

$$c_n = \frac{n^2+3+7^n}{2+4^n} \overset{(\mathbf{2p})}{=} \frac{\frac{n^2}{2^n}+3+\left(\frac{7}{4}\right)^n}{\frac{2}{4^n}+1} \underset{(\mathbf{2p})}{\xrightarrow{n\to\infty}} +\infty \ne 0 \quad (\mathbf{1p}),$$

tehát nem teljesül a sorok konvergenciájának szükséges feltétele, ezért $\sum_{n\in\mathbb{N}} c_n$ divergens **(2p)** .

5. feladat (5+14=19 pont)
a) Mit mond ki az integrálkritérium?
b) Konvergens-e a

$$\sum_{n\in\mathbb{N},\, n\geq 2} \frac{1}{2n\ln^2(n)}$$

numerikus sor? Amennyiben igen, adjunk nemtriviális felső becslést az elkövetett hibára, ha a sor összegét az $S_{99} = \sum_{n=2}^{99} \frac{1}{2n\ln^2(n)}$ részletösszeggel közelítjük.

Mo. *a*) Legyen $f : [1, +\infty[\to \mathbb{R}_+$ monoton csökkenő függvény. Ekkor

$$\sum_{n=1}^{\infty} f(n) < +\infty \quad \Leftrightarrow \quad \int_1^{\infty} f(x)\mathrm{d}x < +\infty. \qquad (\mathbf{5p})$$

b) Legyen

$$f(x) := \frac{1}{2x\ln^2(x)} \quad (x \geq 2) \quad (\mathbf{2p}).$$

Ekkor f nemnegatív, monoton csökkenő **(2p)** .

$$\int_2^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{b\to\infty} \frac{1}{2} \int_2^b \frac{1}{x} \cdot \ln^{-2}(x)\,\mathrm{d}x \overset{(\mathbf{2p})}{=} \frac{1}{2} \lim_{b\to\infty} \left[-\frac{1}{\ln(x)} \right]_{x=2}^b \overset{(\mathbf{1p})}{=}$$

$$= \frac{1}{2} \lim_{b\to\infty} \left(\frac{1}{\ln(2)} - \frac{1}{\ln(b)} \right) \overset{(\mathbf{1p})}{=} \frac{1}{2\ln(2)} \overset{(\mathbf{1p})}{<} +\infty,$$

tehát az integrálkritérium alapján $\sum\limits_{n\in\mathbb{N},\, n\geq 2} f(n)$ konvergens **(2p)** .

Hibabecslés: Ha S jelöli a sor összegét, akkor

$$\left| S - \sum_{n=2}^{99} f(n) \right| = \sum_{n=100}^{\infty} f(n) \overset{(\mathbf{2p})}{\leq} \int_{99}^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x \overset{(\mathbf{1p})}{=} \frac{1}{2\ln(99)}.$$

IMSc feladat (15 IMSc pont) Határozzuk meg a

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2n^2 + 6n + 4}$$

összeget.
(Ha az összeg meghatározása nem sikerül, akkor legfeljebb **5 IMSc pontért** adjunk olyan $K_1 \in \mathbb{R}$ alsó és $K_2 \in \mathbb{R}$ felső becslést az összegre, amelyekre $K_2 - K_1 \leq 0{,}2$.)

Mo. Minden $n \in \mathbb{N}$ esetén

$$\frac{1}{2n^2+6n+4} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{(n+1)(n+2)} \quad (\mathbf{3p}).$$

Parciális törtekre bontással:

$$\frac{1}{(n+1)(n+2)} = \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} \quad (n \in \mathbb{N}) \quad (\mathbf{5p})$$

Tehát

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2n^2+6n+4} \overset{(\mathbf{2p})}{=} \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{2}\left(\frac{1}{k+1} - \frac{1}{k+2}\right) \overset{(\mathbf{3p})}{=} \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{n+2}\right) \overset{(\mathbf{2p})}{=} \frac{1}{2}.$$

Becslés részpontszámért: Egy 5 pontos megoldás például, ha kiszámoljuk "kézzel" az N-edik részletösszeget (pl. $N = 3$), és a maradékösszegre adunk a feladat szövegének megfelelő alsó és felső becslést egy improprius integrál segítségével.

ANALÍZIS 2. | **I. aláíráspótló zárthelyi** | **2022. május 31.**
Mérnökinformatikus szak | α-variáns | Munkaidő: 90 perc

---

1. feladat (12+8=20 pont)
a) Oldjuk meg az alábbi differenciálegyenletet. (A megoldást elég implicit alakban megadni.)

$$y' = \frac{2x(y^2+1)}{x^2+1}$$

b) Rajzoljuk fel az

$$y' = y^2 - x + 1$$

differenciálegyenlet $K = 1$-hez tartozó izoklináját, és jelöljünk be rajta két vonalelemet!

2. feladat (20 pont)
Oldjuk meg az

$$y' = (2y - 2x)^2 + 1$$

differenciálegyenletet az $y(0) = -1$ kezdeti feltétel mellet! (A megoldást explicit alakban adjuk meg.)

3. feladat (20 pont)
Adjuk meg az

$$y^{(4)} + 2y^{(3)} + y'' = 18e^{2x}$$

differenciálegyenlet általános megoldását!

4. feladat (7+7+7=21 pont)
Konvergensek-e az alábbi sorok?

$$a)\ \sum_{n\in\mathbb{N}^+} \frac{2^{n+3}}{(3+\sqrt[n]{n})^n} \qquad b)\ \sum_{n\in\mathbb{N}} (-1)^n \frac{n+2}{n+3} \qquad c)\ \sum_{n\in\mathbb{N}} (-1)^n \frac{2^{n+1}}{n!}$$

5. feladat (7+12=19 pont)
a) Milyen sorokat nevezünk Leibniz-típusú soroknak? Mit mond ki a Leibniz-kritérium? Hogyan becsülhetjük egy Leibniz-sor hibáját? (Bizonyítás nélkül mondja ki a tanult állításokat!)
b) Konvergens-e a

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} (-1)^n \frac{1}{\sqrt{n^2+3n+1}}$$

numerikus sor? Amennyiben igen, adjunk nemtriviális felső becslést az elkövetett hibára, ha a sor összegét az $S_{99} := \sum_{n=0}^{99} (-1)^n \frac{1}{\sqrt{n^2+3n+1}}$ részletösszeggel közelítjük.

1. feladat (12+8=20 pont)
a) Oldjuk meg az alábbi differenciálegyenletet. (A megoldást elég implicit alakban megadni.)

$$y' = \frac{2x(y^2+1)}{x^2+1}$$

b) Rajzoljuk fel az

$$y' = y^2 - x + 1$$

differenciálegyenlet $K = 1$-hez tartozó izoklináját, és jelöljünk be rajta két vonalelemet!

Mo. *a*) Szeparálható differenciálegyenlet, a tanult módszerrel:

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{2x(y^2+1)}{x^2+1} \quad \Longrightarrow \quad \int \frac{1}{y^2+1}\,\mathrm{d}y = \int \frac{2x}{x^2+1}\,\mathrm{d}x \quad (\mathbf{2p})$$

Az egyenlőség bal oldala:

$$\int \frac{1}{y^2+1}\,\mathrm{d}y = \mathrm{arctg}(y) + C_1 \quad (C_1 \in \mathbb{R}) \quad (\mathbf{4p})$$

Az egyenlőség jobb oldala:

$$\int \frac{2x}{x^2+1}\,\mathrm{d}x = \ln(x^2+1) + C_2 \quad (C_2 \in \mathbb{R}) \quad (\mathbf{4p})$$

Tehát a megoldások:

$$\mathrm{arctg}\,(y(x)) = \ln(x^2+1) + C \quad (C \in \mathbb{R}) \quad (\mathbf{2p})$$

b) A $K = 1$-hez tartozó izoklina az $x = y^2$ egyenletű parabola **(5p)** , a vonalelemek 1 meredekségűek **(3p)** .

---

2. feladat (20 pont)
Oldjuk meg az

$$y' = (2y - 2x)^2 + 1$$

differenciálegyenletet az $y(0) = -1$ kezdeti feltétel mellet! (A megoldást explicit alakban adjuk meg.)

Mo. Legyen $u(x) := 2y(x) - 2x$ **(2p)** . Ekkor

$$u'(x) = 2y'(x) - 2 \quad \Leftrightarrow \quad y'(x) = \frac{u'(x)}{2} + 1 \quad (\mathbf{2p}),$$

tehát az új differenciálegyenlet:

$$u' = 2u^2 \quad (\mathbf{2p})$$

Szeparálható, $u \equiv 0$ megoldás **(1p)** . A tanult módszerrel:

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} = 2u^2 \quad \Longrightarrow \quad \int u^{-2}\,\mathrm{d}u = \int 2\,\mathrm{d}x \quad (\mathbf{2p}) \quad \Longrightarrow \quad -\frac{1}{u(x)} = 2x + \widetilde{C} \quad (\widetilde{C} \in \mathbb{R}) \quad (\mathbf{3p}),$$

tehát az eredeti egyenlet megoldásai:

$$y(x) = x - \frac{1}{4x - C} \quad (\mathbf{4p}) \quad \text{és} \quad y(x) = x \quad (\mathbf{1p})$$

A megadott kezdeti feltétel melletti megoldást jelölje $\widetilde{y}$, ekkor:

$$\widetilde{y}(0) = -1 \quad \Longrightarrow \quad C = 1 \quad (\mathbf{1p}) \qquad \Longrightarrow \quad \widetilde{y}(x) = x + \frac{1}{1 - 4x} \quad (\mathbf{2p}) \quad \left(x \in \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{1}{4}\right\}\right).$$

---

3. feladat (20 pont)
Adjuk meg az

$$y^{(4)} + 2y^{(3)} + y'' = 18e^{2x}$$

differenciálegyenlet általános megoldását!

Mo. Negyedrendű, lineáris állandó együtthatós, inhomogén egyenlet. A homogén egyenlethez tartozó karakterisztikus egyenlet:

$$\lambda^4 + 2\lambda^3 + \lambda^2 = 0 \quad (\mathbf{2p}),$$

gyökei: $\lambda_{1,2} = 0$, $\lambda_{3,4} = -1$ **(2p)** . Ebből a homogén egyenlet általános megoldása:

$$y_{h,á}(x) = C_1 + C_2 x + C_3 e^{-x} + C_4 x e^{-x} \quad (x \in \mathbb{R},\ C_1, C_2, C_3, C_4 \in \mathbb{R}) \quad (\mathbf{4p})$$

Az inhomogén egyenlet egy partikuláris megoldását keressük az $y(x) = Ae^{2x}$ alakban **(2p)** $(x \in \mathbb{R},\ A \in \mathbb{R})$ (nincs rezonancia). Deriválva négyszer **(3p)** :

$$\begin{aligned} y(x) &= Ae^{2x} && \mid \cdot 0 \\ y'(x) &= 2Ae^{2x} && \mid \cdot 0 \\ y''(x) &= 4Ae^{2x} && \mid \cdot 1 \\ y^{(3)}(x) &= 8Ae^{2x} && \mid \cdot 2 \\ y^{(4)}(x) &= 16Ae^{2x} && \mid \cdot 1 \end{aligned}$$

Behelyettesítve a differenciálegyenletbe:

$$36Ae^{2x} = 18e^{2x} \quad (\mathbf{2p}) \quad \Longrightarrow \quad A = \frac{1}{2} \quad (\mathbf{2p}),$$

tehát az inhomogén egyenlet egy partikuláris megoldása:

$$y_{i,p}(x) = \frac{1}{2}e^{2x} \quad (x \in \mathbb{R}) \quad (\mathbf{1p})$$

A differenciálegyenlet általános megoldása:

$$y_{i,á}(x) = y_{i,p}(x) + y_{h,á}(x) =$$
$$= \frac{1}{2}e^{2x} + C_1 + C_2x + C_3e^{-x} + C_4xe^{-x} \quad (x \in \mathbb{R},\, C_1, C_2, C_3, C_4 \in \mathbb{R}) \quad \textbf{(2p)}$$

---

4. feladat (7+7+7=21 pont)
Konvergensek-e az alábbi sorok?

$$a)\ \sum_{n\in\mathbb{N}^+} \frac{2^{n+3}}{(3+\sqrt[n]{n})^n} \qquad b)\ \sum_{n\in\mathbb{N}} (-1)^n \frac{n+2}{n+3} \qquad c)\ \sum_{n\in\mathbb{N}} (-1)^n \frac{2^{n+1}}{n!}$$

Mo. *a)* Legyen $a_n := \dfrac{2^{n+3}}{(3+\sqrt[n]{n})^n} \quad (n \in \mathbb{N}^+)$.

$$\sqrt[n]{a_n} \overset{\textbf{(2p)}}{=} \frac{\sqrt[n]{8}\cdot 2}{3+\sqrt[n]{n}} \underset{\textbf{(2p)}}{\overset{n\to\infty}{\longrightarrow}} \frac{1}{2} < 1 \quad \textbf{(1p)}$$

tehát a gyökkritérium alapján $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} b_n$ konvergens **(2p)** .

b) Legyen $b_n := (-1)^n \dfrac{n+2}{n+3} \quad (n \in \mathbb{N})$. Ekkor $|b_n| \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 1$ **(2p)** , így a $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sorozat nem tart 0-oz **(3p)** , tehát $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} b_n$ divergens **(2p)** .

c) Legyen $c_n := (-1)^n \dfrac{2^{n+1}}{n!} \quad (n \in \mathbb{N})$.
Első megoldás. Minden $n \in \mathbb{N}$ esetén

$$\frac{|c_{n+1}|}{|c_n|} \overset{\textbf{(1p)}}{=} \frac{2^{n+2}}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{2^{n+1}} \overset{\textbf{(2p)}}{=} \frac{2}{n+1} \underset{\textbf{(1p)}}{\overset{n\to\infty}{\longrightarrow}} 0 < 1 \quad \textbf{(1p)}$$

azaz a hányadoskritérium alapján a $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} c_n$ numerikus sor abszolút konvergens **(1p)** , tehát konvergens **(1p)** .
Második megoldás. $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} c_n$ alternál **(1p)** , $c_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$ **(1p)** , továbbá minden $n \in \mathbb{N}^+$ esetén

$$\frac{|c_{n+1}|}{|c_n|} \overset{\textbf{(1p)}}{=} \frac{2^{n+2}}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{2^{n+1}} \overset{\textbf{(2p)}}{=} \frac{2}{n+1} \le 1 \quad \textbf{(1p)},$$

azaz $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} c_n$ tágabb értelemben vett Leibniz-sor, tehát konvergens **(1p)** .
(Az a megoldás is maximális pontot ér, amelyben a hallgató észreveszi, hogy egy nevezetes sorról van szó, amelynek összege $\frac{2}{e^2}$.)

5. feladat (7+12=19 pont)
a) Milyen sorokat nevezünk Leibniz-típusú soroknak? Mit mond ki a Leibniz-kritérium? Hogyan becsülhetjük egy Leibniz-sor hibáját? (Bizonyítás nélkül mondja ki a tanult állításokat!)
b) Konvergens-e a

$$\sum_{n\in\mathbb{N}}(-1)^n\frac{1}{\sqrt{n^2+3n+1}}$$

numerikus sor? Amennyiben igen, adjunk nemtriviális felső becslést az elkövetett hibára, ha a sor összegét az $S_{99} := \sum_{n=0}^{99}(-1)^n\frac{1}{\sqrt{n^2+3n+1}}$ részletösszeggel közelítjük.

Mo. *a*) *Lebiniz-sor definíciója:* Azt mondjuk, hogy az $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n$ numerikus sor **Leibniz-sor**, ha a következő tulajdonságok teljesülnek rá.

(i) Minden $n \in \mathbb{N}$ esetén $a_{n+1}\cdot a_n \leq 0$ (azaz **alternál**). **(1p)**

(ii) Az $(|a_n|)_{n\in\mathbb{N}}$ sorozat monoton csökkenő. **(1p)**

(iii) $\lim_{n\to\infty}|a_n| = 0$. **(1p)**

(Ha az első két tulajdonság egy küszöbindextől kezdve teljesül, akkor $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n$-et **tágabb értelemben vett Leibniz-sornak** nevezzük.)

Leibniz-kritérium: Minden (tágabb értelemben vett) Leibniz-sor konvergens. **(2p)**
Ha $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n$ Leibniz-sor, és $S \in \mathbb{R}$ jelöli a sor összegét, akkor minden $n \in \mathbb{N}$ esetén

$$\left|\sum_{k=0}^{n} a_k - S\right| \leq |a_{n+1}| \quad \textbf{(2p)}.$$

b) Minden $n \in \mathbb{N}$ esetén legyen $a_n := (-1)^n\frac{1}{\sqrt{n^2+3n+1}}$. Ekkor $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n$ alternál **(1p)** , $\lim_{n\to\infty}|a_n| = 0$ **(2p)** , illetve $(|a_n|)_{n\in\mathbb{N}}$ monoton csökkenő **(1p)** , hiszen egy monoton növő, pozitív tagú sorozat reciproka **(3p)** , tehát a Leibniz-kritérium alapján $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n$ sor konvergens **(2p)** .
Hibabecslés: Szintén a Leibniz-kritérium alapján, ha S jelöli a sor összegét, akkor

$$|S_{99} - S| \leq |a_{100}| = \frac{1}{\sqrt{10301}} \quad \textbf{(3p)}$$
